Portfolion optimointi ja utiliteetin maksimointi, kun transaktioilla on kuluja

Eetu Savolainen

Helsingin yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Pro gradu-tutkielma

Syyskuu 2020

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Koulutusohjelma — Utbildningsprogram — Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen maisteriohjelma

Tekijä — Författare — Author

Eetu Savolainen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Portfolion optimointi ja utiliteetin maksimointi, kun transaktioilla on kuluja

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Syyskuu 2020	46 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tässä työssä tarkastellaan portfolion optimointia ja utiliteettiteorian perusteita äärellisulotteisessa todennäköisyysavaruudessa. Työssä on rajoituttu tarkastelemaan diskreettiaikaista markkinamallia, missä markkinan toimijan pitää osakkeita myydessään maksaa transaktiokuluja.

Työn alussa esitetään tarvittavat määritelmät ja työkalut, jotta saadaan käytyä läpi tulokset liittyen rahoitusteoriaan ja utiliteettiteoriaan markkinoilla, jossa transaktioilla on kuluja. Nämä asiat liittyen konveksiin analyysiin, polyedrisiin joukkoihin ja todennäköisyysteorian perusteisiin on esitetty tiiviinä kokonaisuutena, sillä niiden tarkoitus on toimia taustamateriaalina ja tukena, kun tarkastellaan myöhempien lukujen asioita.

Kolmannessa kappaleessa lähdetään tarkastelemaan äärellisessä filtroidussa todennäköisyysavaruudessa markkinoita, jossa transaktioilla on kuluja. Määritellään osakkeenhinnoitteluprosessiin, toimijan portfolioon ja yleisemmin rahoitusteoriaan liittyen perusasiat ja ominaisuudet siten, että saadaan johdettua kitkallisen markkinan rahoitusteorian peruslause. Lisäksi rahoitusteorian peruslauseesta johdetaan korollaari yksiulotteinen superreplikointiteoreema, joka osoittautuu hyödylliseksi utiliteetin maksimointiongelman ratkaisussa.

Neljännessä kappaleessa siirrytään tämän teoksen pääaiheen pariin, eli utiliteettiteoriaan ja toimijan portfolion optimointiin. Määritellään utiliteettiteorian perusasiat kitkallisella markkinalla ja määritellään utiliteetin maksimointiongelma, jossa markkinoiden toimija pyrkii maksimoimaan lopetusajanhetken utiliteettinsa. Tämä portfolion optimointiongelma voidaan uudelleenformalisoida yksiulotteisen superreplikointiteoreeman avulla konkaavina optimointiongelmana, jota rajoittaa lineaariset rajoitteet.

Viimeisessä kappaleessa lähdetään tarkastelemaan portfolion konstruointia ja utiliteetin maksimointia käytännössä. Tehdään kaksi havainnollisuuden vuoksi yksinkertaista simulaatiota, missä tietystä näkökulmasta lähdetään rakentamaan osakkeen hinnoitteluprosessia ja mietitään miten toimijan utiliteetti saataisiin maksimoitua määritellyllä markkinalla. Nämä simulaatiot toteutetaan R-ohjelmointikielellä. Tarkoituksena on esittää pohdintaa siitä millaiset tekijät ja oletukset vaikuttavat toimijan optimaalisen salkun valintaan ja muodostumiseen. Optimaalisuutta tutkitaan muuttamalla alkuperäisiä oletuksia ja katsomalla miten oletusten muuttaminen vaikuttaa lopputulokseen. Toisessa simulaatiossa pyritään vertailemaan muutamia tyypillisimpiä sijoitusstrategioita toisiinsa.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Utiliteettiteoria, rahoitusteoria, portfolion optimointi, transaktiokulut, R-ohjelmointikieli

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisällys

1 Johdanto

Tämän teoksen tavoitteena on tarkastella utiliteettiteoriaa ja portfolion optimointia tapauksessa, jossa transaktioilla on kuluja. Tällöin markkinoilla olevan toimijan on maksettava osa osakkeen hinnasta kaupankäyntikuluina, kun hän myy osakkeita. Rajoitutaan tarkastelemaan diskreettiaikaista markkinaa ja oletetaan, että markkinoilla on vain yksi osake ja velkakirja. Tämän seurauksena tarkastelu redusoituu tavalliseksi lineaarialgebraksi ja saadut tulokset säilyvät mahdollisimman selkeinä ja yksinkertaisina. Päälähteinä on käytetty itävaltalaisen matemaatikon Walter Schachermayerin teosta Asymptotic Theory of Transaction Costs [1] sekä Schachermayerin ja Freddy Delbaen teosta The mathematics of arbitrage [2]. Ensimmäisestä lähteestä on valikoitu tämän teoksen tärkeimmät teoreemat, jonka jälkeen on muodostettu niiden ympärille teoreemoja tukeva rakenne. Lisäksi voidaan mainita, että esimerkiksi Yuri Kabanovin ja Mher Safarianin teos Markets with Transaction Costs [3] käsittelee aihetta ja siinä tarkastellaan markkinoiden arbitraasiteoriaa sekä kitkattomassa markkinamallissa että markkinassa, jossa transaktioilla on kuluja.

Kappaleessa 2 rakennetaan työn kannalta riittävät määritelmät ja työkalut, jotta saadaan rakennettua seuraavien kappaleiden tulokset liittyen rahoitusteoriaan ja utiliteettiteoriaan markkinassa, jossa transaktioilla on kuluja. Konveksin analyysin osalta keskitytään polaarijoukkoihin ja niiden ominaisuuksiin: minkälaisia ominaisuuksia konvekseilla joukoilla ja varsinkin konvekseilla kartioilla on. Polyedristen joukkojen osalta määritellään vain polyedrit ja keskitytään siihen, että miten ne rakentuvat. Polyedrin voi rakentaa ns. joko sisältä tai ulkoapäin. Viimeisenä määritellään todennäköisyysteorian perusasiat, mitkä ovat suurin piirtein samat kuin missä tahansa todennäköisyysteorian perusteita käsittelevässä teoksessa: σ-algebrat, todennäköisyysmitat, martingaalit ja niiden tämän työn kannalta relevantit ominaisuudet.

Kolmannessa kappaleessa lähdetään tarkastelemaan äärellisessä filteroidussa todennäköisyysavaruudessa markkinoita, jossa transaktioilla on kuluja. Määritellään osakkeenhinnoitteluprosessiin, toimijan portfolioon ja yleisemmin rahoitusteoriaan liittyen perusasiat ja ominaisuudet siten, että saadaan johdettua kitkallisen markkinan rahoitusteorian peruslause. Lisäksi kappaleessa johdetaan rahoitusteorian peruslauseesta kolme korollaaria, joista varsinkin jälkimmäinen, yksiulotteinen superreplikointiteoreema osoittautuu hyödylliseksi utiliteetin maksimointiongelman kannalta.

Neljännessä kappaleessa siirrytään tämän teoksen kannalta pääaiheen pariin, eli utiliteettiteoriaan ja toimijan portfolion optimointiin. Määritellään utiliteettiteorian perusasiat kitkallisella markkinalla ja määritellään utiliteetin maksimointiongelma, jossa markkinoiden toimija pyrkii maksimoimaan lopetusajanhetken utiliteettinsa. Utiliteettia mitataan bondeissa. Tämä portfolion optimointiongelma voidaan uudelleenformalisoida edellisen kappaleen yksiulotteisen superreplikointiteoreeman avulla konkaavina optimointiongelmana, jota rajoittaa lineaariset rajoitteet. Utiliteetin optimointiongelma ratkaistaan tyypilliseen tapaan Lagrangen funktion avulla. Tässä teoksessa satulapiste löydettiin valistuneen arvauksen avulla, kun taas tyypillisesti satulapisteen olemassaolo varmistetaan minmax-tyyppisellä argumentilla.

Viimeisessä kappaleessa lähdetään tarkastelemaan portfolion konstruointia ja utiliteetin maksimointia käytännössä. Tehdään kaksi eri simulaatiota, missä tietystä näkökulmasta lähdetään rakentamaan osakkeen hinnoitteluprosessia ja mietitään miten toimijan utiliteetti saadaan maksimoitua eri skenaarioissa. Pitkin kappaletta esiintyy pohdintaa, minkälaiset tekijät ja oletukset vaikuttavat toimijan optimaalisen salkun valintaan ja muodostumiseen. Varioidaan simulaatioiden oletuksia ja lähdetään tutkimaan niitä näkökulmasta, että saadaan erilaisia tuloksia ulos. Tämän tarkoituksena on avata ja havannoida edellisen kappaleen asioita käytännönläheisestä näkökulmasta. Lisäksi toisessa simulaatiossa pyritään vertailemaan muutamia loogisimpia sijoitusstrategioita toisiinsa, jolloin avautuu kuinka paljon erilaiset strategiat voivat vaikuttaa toimijan lopetusvarallisuuteen ja siten myös utiliteettiin.

2 Konveksi analyysi ja todennäköisyysavaruudet

Määritellään tässä kappaleessa työn kannalta välttämättömät analyysin ja todennäköisyysteorian määritelmät ja työkalut, joita tarvitaan seuraavien kappaleiden määritelmien, teoreemojen ja todistusten rakentamisessa. Kappaleen tarkoituksena on toimia tarvittavissa määrin taustamateriaalina sekä seuraavien kappaleiden tukena.

2.1 Polaarijoukot

Tarkastellaan reaalilukujen muodostamaa vektoriavaruutta E, jonka ulottuvuus on d, missä d on äärellinen luku. Oletetaan, että avaruuden E duaali on avaruus E'. Tällöin E ja E' ovat isomorfisia avaruuden $\mathbb{R}^d$ kanssa. Tarkastellaan muutamia konveksin geometrian määritelmiä, keskittyen varsinkin polaarijoukkoihin ja niiden ominaisuuksiin.

Määritelmä 2.1. Määritellään avaruuden $\mathbb{R}^d$ kahden pisteen x ja y muodostama jana $[x, y]$ joukkona

$$[x, y] = \{z = \alpha x + (1 - \alpha)y \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}, \tag{1}$$

missä x ja y ovat janan päätepisteet.

Määritelmä 2.2. Määritellään kahden joukon $A, B \in \mathbb{R}^n$ Minkowskin summa $A + B$

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}. \tag{2}$$

Määritelmä 2.3. Avaruuden E osajoukko E_1 on *konveksi*, jos $[a, b] \subset E_1$, kaikilla $a, b \in E_1$.

Geometrisesti ajateltuna siis joukko E_1 on konveksi, jos voidaan valita mitkä tahansa kaksi pistettä a ja b joukosta E_1, piirtää niiden välille jana, niin se sisältyy joukkoon E_1.

Määritelmä 2.4. Kaikilla joukoilla $E_2 \subseteq E$ määritellään, että pienin suljettu konveksi joukko johon E_2 sisältyy on joukon E_2 *suljettu konveksi peite*, eli $\overline{\text{conv}}(E_2)$ on leikkaus kaikista konvekseista joukoista johon E_2 sisältyy.

Sanotaan, että suljettu konveksi joukko $E_3 \subset E$ on *suljettu konveksi kartio*, jos kaikilla $a \in E_3$ ja $\mu \geq 0$ pätee $\mu a \in E_3$.

Määritelmä 2.5. Osajoukon $E_4 \subseteq E$ *generoima suljettu konveksi kartio* on

$$\text{cone}(E_4) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mu_i w_i : w_i \in E_4, \mu_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \right\}. \tag{3}$$

Tämä on pienin suljettu kartio johon joukko E_4 kuuluu. Määritellään lisäksi, että tyhjän joukon generoima kartio on $\text{cone}(\emptyset) := \{0\}$. Nollavektori $\{0\}$ on siis konveksi kartio.

Määritelmä 2.6. Määritellään joukon $A \subseteq E$ *napajoukko* A°

$$A^\circ := \{y \in E' : \langle x, y\rangle \leq 1, \text{ kaikilla } x \in A\}, \tag{4}$$

missä E' on avaruuden E duaaliavaruus. Lisäksi kun E on R^d, niin tällöin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on skalaaritulo. Myöhemmin tullaan tarkastelemaan tapausta, jossa joukko A on kartio. Tällöin napajoukko voidaan määritellä muodossa

$$A^\circ = \{y \in E' : \langle x, y\rangle \leq 0, \text{ kaikilla } x \in A\}. \tag{5}$$

Kun joukko A on kartio, niin tällöin kartion napajoukko on suljettu konveksi kartio.

Lemma 2.1. Napajoukoille pätee seuraavat kaksi ominaisuutta.

1. Jos $A \subseteq B \subseteq E$, tällöin $B^\circ \subseteq A^\circ$.
2. Jos $C_1, C_2 \subseteq E$ ovat kartioita, niin $(C_1 + C_2)^\circ = C_1^\circ \cap C_2^\circ$.

Todistus. Ominaisuus 1. Oletetaan, että $A \subseteq B \subseteq E$. Jos $y \in B^\circ$ tällöin $\langle x, y\rangle \leq 1$, kaikilla $x \in B$. Tästä seuraa, että $\langle x, y\rangle \leq 1$ pätee myös kaikilla $x \in A$, sillä $A \subseteq B$. Siten $y \in A^\circ$.

Ominaisuus 2. Oletetaan ensin, että $x \in C_1^\circ \cap C_2^\circ$. Tällöin epäyhtälö $\langle x, y_1\rangle \leq 0$ pätee kaikilla $y_1 \in C_1$ ja $\langle x, y_2\rangle \leq 0$ kaikilla $y_2 \in C_2$. Nyt jos $y \in C_1 + C_2$, niin voidaan kirjoittaa $y = y_1 + y_2$. Tällöin

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle \leq 0, \tag{6}$$

ja siten $x \in (C_1 + C_2)^\circ$ ja $(C_1 + C_2)^\circ \supseteq C_1^\circ \cap C_2^\circ$.

Toisaalta oletaan, että $x \in (C_1 + C_2)^\circ$, mutta $x \notin C_1^\circ$. Tällöin on olemassa $y_1 \in C_1$ siten, että $\langle x, y_1\rangle > 0$. Nyt koska C_2 on kartio, niin tällöin $\lambda y_2 \in C_2$ kaikilla $y_2 \in C_2$ ja $\lambda > 0$. Nyt voidaan määrätä $\langle x, y_2\rangle$ olevan mielivaltaisen pieni ja tällöin on olemassa $y_2 \in C_2$ siten, että $\langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle > 0$. Tämä on ristiriidassa oletuksen $x \in (C_1 + C_2)^\circ$ kanssa. Saadaan, että jos $x \in (C_1 + C_2)^\circ$, niin tällöin $x \in C_1^\circ \cap C_2^\circ$, mistä seuraa ominaisuuden 1 nojalla, että $(C_1 + C_2)^\circ \subseteq C_1^\circ \cap C_2^\circ$ ja väite on saatu todistettua. □

Seuraavaksi tavoitteena olisi osoittaa, että joukon $A \subseteq E$ napajoukon napajoukko on yhtä suuri kuin kyseisen joukon ja origon muodostama suljettu konveksi peite $\overline{\text{conv}}(A \cup 0)$. Tämän todistuksessa käytetään tietoa, että kahden epätyhjän, erillisen konveksin joukon välille voidaan asettaa hypertaso, joka erottaa nämä kaksi joukkoa. Tätä teoreemaa kutsutaan separoivan hypertason teoreemaksi.

Lause 2.1. (Separoivan hypertason teoreema) Olkoon A ja B epätyhjiä, erillisiä ja konveksejä reaaliavaruuden $\mathbb{R}^d$ osajoukkoja. Tällöin on olemassa nollasta poikkeava vektori $z \in E$ ja vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\langle x, z\rangle \geq c \text{ ja } \langle y, z\rangle \leq c, \tag{7}$$

kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$. Lisäksi jos toinen joukoista on avoin, niin tällöin sille pätevä epäyhtälö on aito.

Todistus. Sivuutetaan tämän todistus. Todistuksen voi tarkastaa esimerkiksi teoksen [4] kappaleesta 2. □

Lause 2.2. (Bipolaari teoreema) Oletetaan, että $A \subseteq E$. Tällöin joukon A napajoukon napajoukko (bipolaarinen joukko) on $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ = \overline{\text{conv}}(A \cup \{0\})$.

Todistus. Olkoon B konveksi peite $B = \text{conv}(A \cup \{0\})$. Koska $A \subseteq B$, tällöin $B^\circ \subseteq A^\circ$. Olkoon $y \in A^\circ$ ja $M \in \mathbb{N}$ ja valitaan $\lambda_i \in [0, 1]$, kun $1 \leq i \leq M$ siten, että $\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1$. Tällöin kaikilla $a_i \in A \cup \{0\}$,

$$1 \geq \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \langle y, a_i \rangle = \sum_{i=1}^{M} \langle y, \lambda_i a_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^{M} \lambda_i y, a_i \rangle. \tag{8}$$

Jokainen $x \in B$ voidaan kirjoittaa muodossa $x = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i a_i$. Tästä saadaan käänteinen sisältyvyys $A^\circ \subseteq B^\circ$, jolloin $A^\circ = B^\circ$.

Osoitetaan nyt, että $B^{\circ\circ} = \overline{B}$. Olkoon $x \in \overline{B}$. Määritelmän ja jatkuvuuden nojalla kaikilla $y \in B^\circ$ pätee $\langle x, y \rangle \leq 1$, mistä seuraa että $x \in B^{\circ\circ}$ ja siten $\overline{B} \subseteq B^{\circ\circ}$. Tehdään vastaoletus, että $x \notin \overline{B}$ ja osoitetaan, että tästä seuraa, että $x \notin B^{\circ\circ}$.

Oletetaan, että $x_0 \notin \overline{B}$. Nyt separoituvan hypertason teoreeman mukaan on olemassa $y \in E'$ ja vakio c siten, että $\langle x, y \rangle \leq c$, kun $x \in B$ ja $\langle x_0, y \rangle > c$. Koska $0 \in B$, niin $c \geq 0$. Voidaan olettaa, että $c > 0$. Tällöin $\langle x, y/c \rangle \leq 1$, kun $x \in B$ ja siten $y/c \in B^\circ$. Mutta tiedosta $\langle x_0, y/c \rangle > 1$ nähdään, että $x_0 \notin B^{\circ\circ}$. Väite on saatu todistetua. □

Tämän välittömänä seurauksena saadaan vastaava tulos suljetuille konvekseille kartioille.

Korollaari 2.1. Oletetaan, että $C \subseteq E$ on suljettu konveksi kartio. Tällöin joukon C bipolaarinen joukko on $C^{\circ\circ} = C$.

2.2 Polyedriset joukot

Polyedrillä tarkoitetaan monitahokasta, eli moniulotteista geometrista kappaletta, jonka pinta muodostuu monikulmiosta. Tarkastellaan polyedrisiä joukkoja vain hyvin pintapuolisesti ja niiden yhteys tämän työn teoriaan liittyy lähinnä markkinan toimijan sijoitusstrategiaan. Seuraavassa kappaleessa osoittautuu, että toimijan käyttämien sijoitusstrategioiden muodostama joukko satunnaismuuttujia muodostavat suljetun polyedrisen kartion. Esimerkkinä voidaan antaa noppa. Arpakuutio on polyedri, jonka pinta muodostuu kuudesta neliöstä.

Määritellään matemaattisesti polyedrit kahdella eri tapaa: rakennetaan ne sekä ”ulkoa”päin, että ”sisältä”päin. Olkoon V ja W äärellisiä joukon E osajoukkoja. Joukon V konveksin peitteen ja joukon W generoiman kartion Minkowskin summaa

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(W) \tag{9}$$

kutsutaan *V-polyedriksi.* Nimi tulee siitä, että polyedri määritellään sen kärkien (ääriarvojen) avulla. Lisäksi P on suljettu joukko. Pistejoukon $\{0\}$ avulla saadaan johdettua kaikki kompaktit polyedrit.

Sanotaan, että joukko $P \subseteq E$ on *H-polyedri*, jos se voidaan ilmaista äärellisenä leikkauksena suljetuista puoliavaruuksista, eli

$$P = \cap_{i=1}^{N} \{x \in E : \langle x, y_i \rangle \leq c_i\}, \tag{10}$$

joillakin alkioilla $y_i \in E'$ ja vakioilla $c_i, i \in \{1, ..., N\}$. Joukon $\mathbb{R}^d$ osajoukkona polyedri voidaan kirjoittaa muodossa

$$P = P(A, z) := \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq z\}, \text{ jollakin } A \in \mathbb{R}^{Nxd}, z \in \mathbb{R}^d. \tag{11}$$

On huomionarvoista mainita, että H-polyedri, jossa kaikki vakiot c_i ovat nollia on suljettu konveksi kartio. Voidaan käyttää myös nimitystä polyedrinen kartio.

Lemma 2.2. Polyedreille pätee seuraavat kolme ominaisuutta:

1. Jokainen V-polyedri on H-polyedri ja kääntäen myös jokainen H-polyedri on V-polyedri.

2. Konveksi suljettu joukko, joka sisältää origon on polyedri jos ja vain jos sen polaari on myös polyedri.

3. Kompakti, konveksi ja epätyhjä joukko voidaan esittää sen ääriarvojen (kärkien) muodostaman joukon konveksina peitteenä. Konveksin joukon ääriarvoilla tarkoitetaan joukon pisteitä, jotka eivät kuulu minkään kyseisen joukon kahden pisteen välille piirretylle janalle.

Todistus. Ominaisuuksien todistukset löytyvät artikkelista [5] kappaleesta 4.2. □

Yllä mainitusta materiaalista löytyy myös paljon tarkemmin konveksien ja polyedristen joukkojen teoriasta.

2.3 Todennäköisyysavaruudet

Käydään viimeisenä läpi vielä todennäköisyysavaruuksien osalta oleelliset määritelmät ja teoreemat sekä niiden avaamiseksi muutamat esimerkit. Tarkastellaan perusjoukkoa Ω ja sen osajoukkoja. Kokoelma $\mathcal{F}$ avaruuden Ω osajoukkoja on σ-algebra, jos se toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:

1. Perusjoukko Ω kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}$.

2. Jos joukko $A \in \mathcal{F}$, niin tällöin myös komplementille pätee $A^c \in \mathcal{F}$.

3. Jos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ on numeroituva joukko, niin silloin myös $\cup A_n \in \mathcal{F}$.

Ehdon 2 nojalla voitaisiin korvata ensimmäinen ehto vaatimuksella, että tyhjä joukko $\emptyset$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}$. Lisäksi ehdon 3 kohta $\cup A_n \in \mathcal{F}$ voitaisiin korvata vaatimuksella, että $\cap A_n \in \mathcal{F}$.

Sanotaan, että avaruuden Ω ja σ-algebran pari $(\Omega, \mathcal{F})$ on mitallinen avaruus. Lisätään tarkasteluun vielä todennäköisyysmitta:

Määritelmä 2.7. Todennäköisyysmitta on kuvaus $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, jolle pätee

1. $P(\Omega) = 1$
2. jos $A_n \in \mathcal{F}$ ja $A_n \cap A_m = \emptyset$, kun $n, m \in \mathbb{N}$, niin

$$P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n). \tag{12}$$

Kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muodostaa nyt *todennäköisyysavaruuden*. Sanotaan, että tapahtuma $A \in \mathcal{F}$ tapahtuu P-melkein varmasti (P-m.v.), kun $P(A) = 1$ ja $P(A^c) = 0$.

Esimerkki 2.1. Havainnollistetaan todennäköisyysavaruuksia kahdella esimerkillä.

1. Tavallisen yksinkertaisen kolikonheiton voidaan ajatella muodostavan todennäköisyysavaruuden, missä $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ja kolikonheiton sattumistodennäköisyydet ovat $P(\{0\}) = P(\{1\}) = 1/2$.
2. n-kertaisen kolikonheiton voidaan ajatella muodostavan todennäköisyysavaruuden, missä $\Omega = \{0, 1\}^n = \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) : \omega_i = 0$ tai 1 kaikilla $i \in \{0, .., n\}\}$. Tässä tapauksessa σ-algebraksi muodostuu tapahtuma-avaruuden Ω potenssijoukko $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ja tapahtuman ω todennäköisyydeksi $P(\{\omega\}) = 1/2^n$.

Määritellään todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ filtraatio ajan suhteen kasvavana jonona σ-algebroja. Matemaattisesti ilmaistuna jokaisella luonnollisella luvulla $n \in \mathbb{N}$ olkoon $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ joukon $\mathcal{F}$ ali-σ-algebra. Tällöin sanotaan, että jono $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *filtraatio*, jos kaikilla $m \leq l$ pätee $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_l \subseteq \mathcal{F}$. Jonon alkio siis sisältää kaikkien edeltävien alkioiden sisältämän informaation. Nelikko $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ muodostaa nyt *filteroidun todennäköisyysavaruuden.*

Monesti on hyödyllistä käsitellä filteroituja todennäköisyysavaruuksia, jolloin voidaan suodattaa 'ylimääräisiä' vaihtoehtoja pois, kun tiedetään mitkä tapahtumat ovat toteutuneet ja mitkä ovat tämän tiedon valossa mahdottomia. Myöhemmissä kappaleissa filtraatiota käsitellään ajan t suhteen kasvana jonona ali-σ-algebroja $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$, eli ajan kuluessa edeltävien aikahetkien informaatio on tiedossa tarkasteluajanhetkellä.

Määritelmä 2.8. Todennäköisyysmitat P ja Q avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ ovat ekvivalentteja, jos kaikilla $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 0. \tag{13}$$

Eli mitat ovat ekvivalentteja, jos niillä on samat nollajoukot. Jos mitat ovat ekvivalentteja, niin käytetään sille merkintää $P \sim Q$.

Määritellään, että markkinoilla olevan osakkeen hintaa mallintaa prosessi $\{S_t : t \geq 0\}$. Voidaan olettaa, että osake saa vain positiivisia reaalilukuarvoja. Määritellään prosessille martingaali.

Määritelmä 2.9. Määritellään martingaali diskreettiaikaisena stokastisena prosessina S_1,$S_2, ...$, joka toteuttaa kaikilla ajanhetkillä t seuraavat kaksi kohtaa

$$\begin{aligned} &E(|S_t|) < \infty, \\ &E(S_{t+1}|S_1, ..., S_t) = S_t. \end{aligned} \tag{14}$$

Kun tiedossa on edellisten ajanhetkien arvot, seuraavan ajanhetken $t + 1$ ehdollinen odotusarvo on prosessin viimeisin arvo S_t. Taloustieteellisestä nakökulmasta katsottuna nämä kaksi martingaalin ominaisuutta ovat esimerkiksi osakkeiden hinnoittelussa voimakkaita ominaisuuksia. Jos oletetaan, että osakkeen hinnan kehitys on martingaali, niin tällöin kehityksellä ei ole mitään selkeää trendiä. Lisäksi osakkeen edeltävästä hinnan kehityksestä ei voida tehdä mitään johtopäätöksiä tulevan osalta. Paras 'arvaus' osakkeen tulevasta hinnasta on sen nykyarvo. Reealimaailman markkinoilla ei oikeastaan voida sanoa, että osakkeen hinnoitteluprosessit eivät olisi polkuriippuvaisia. On olemassa monia sijoitusstrategioita, esimerkiksi momentum sijoittaminen ja tekninen analyysi, jotka molemmat olettavat, että osakkeen hinnoitteluprosessit ovat polkuriippuvaisia. Kun osa markkinoiden toimijoista sijoittavat näiden strategioiden perusteella, niin heidän markkinoille sijoittamansa kassavirrat vaikuttavat osakkeiden hinnoitteluprosesseihin kysynnän ja tarjonnan lain mukaisesti. Osakkeisiin kohdistuu kysyntää ja/tai tarjontaa edeltävien aikahetkien informaation perusteella ja ne vaikuttavat siten myös osakkeen tulevaan hintaan.

Käydään martingaaleista esimerkki taas kolikonheittoon liittyen:

Esimerkki 2.2. Oletetaan, että toimija B heittää kolikkoa ja jos toimija A arvaa kolikonheiton lopputuloksen, niin toimija A saa euron ja hävitessään menettää euron. Tämä prosessi on nimeltään yksinkertainen satunnaiskulku. Nyt jos toimijan A varallisuus t kolikonheiton jälkeen on S_t, niin tällöin $t + 1$ heiton jälkeen toimijan odotusarvollinen varallisuus on myös S_t, sillä

$$E(S_{t+1}|S_1, ..., S_t) = \frac{S_t + 1}{2} + \frac{S_t - 1}{2} = S_t. \tag{15}$$

Määritelmä 2.10. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^2)$ filteroitu todennäköisyysavaruus. Määritellään, että avaruus $L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^2)$ koostuu kaikista avaruudessa Ω integroitavista funktioista, eli jos $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^2)$, niin

$$\int_\Omega |f(x)| dP(x) < \infty. \tag{16}$$

Määritelmä 2.11. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^2)$ filteroitu todennäköisyysavaruus. Avaruus $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^2)$ koostuu kaikista avaruuden Ω mitallisista funktioista f siten, että on olemassa positiivinen luku $0 < M < \infty$, jolle pätee

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{melkein kaikilla } x. \tag{17}$$

Nyt ollaan valmiita tarkastelemaan portfolion muodostamista äärellisulotteisessa todennäköisyysavaruudessa ja sen aihealueen teoriaa.

3 Mallit äärellisissä todennäköisyysavaruuksissa

Tässä ja seuraavassa kappaleessa tarkastellaan portfolion optimointiteoriaa äärellisten todennäköisyysavaruuksien tapauksessa. Oletuksen seurauksena kaikki relevantit avaruudet ovat ulottuvuudeltaan äärellisiä ja käytettävät funktionaalianalyysin työkalut redusoituvat tavalliseksi lineaarialgebraksi. Määritellään ensin osakkeenhinnoitteluprosessin ja portfolion muodostamiseen liittyvät asiat ja tarvittavat väitteet. Tarkastellaan tämän jälkeen rahoitusteorian peruslausetta, kun transaktioilla on kuluja.

3.1 Portfolion konstruointi ja ominaisuuksia

Oletetaan, että tarkastellaan äärellistä filteroitua todennäköisyysavaruutta $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t=0}^T, P)$, missä $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ on avaruuden Ω kaikkien osajoukkojen muodostama σ-algebra, joka on äärellinen kokoelma joukkoja, sillä oletettiin että avaruus Ω on äärellinen. Oletetaan myös, että tarkastellaan osakkeen hintaprosessia $S = (S_t)_{t=0}^T$, joka on äärellinen, diskreettiaikainen ja perustuu edellä määriteltyyn todennäköisyysavaruuteen. Lisäksi hintaprosessi on todennäköisyysavaruuden suhteen $\mathcal{F}$-sopiva. Prosessin sopivuus tarkoittaa, että hetkellä t tiedämme sen arvon S_t. Eli kaikilla ajanhetkillä t prosessi $S_t(\omega)$ on $\mathcal{F}$-mitallinen. Ilman, että menetetään yleisyyttä voidaan olettaa, että $P(\omega) > 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$.

Oletetaan, että on olemassa vain yksi osake, joka saa vain positiivisia arvoja. Tällöin hinnoitteluprosessi $S = (S_t)_{t=0}^T$ saa arvonsa joukossa $\mathbb{R}_+$. Oletetaan asetelmaan myös yksi velkakirja (bondi) ja merkitään sitä $B = (B_t)_{t=0}^T$. Valitaan velkakirja numereeriksi, jolloin voidaan olettaa, että $B_t \equiv 1$. Merkitään markkinoiden toimijan salkkua ajanhetkellä t merkinnällä $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)$, missä φ_t^0 on toimijan omistamien velkakirjojen lukumäärä ja φ_t^1 osakkeiden lukumäärä ajanhetkellä t.

Mallinnetaan transaktiokuluja luvulla $\lambda \geq 0$. Tällöin prosessi $((1-\lambda)S_t, S_t)_{t=0}^T$ mallintaa osakkeen S tarjous- ja pyyntihintoja. Tämä tarkoittaa sitä, että markkinoiden toimijalla on mahdollisuus ostaa osaketta hintaan S, mutta myydessään osaketta sen hinnaksi määräytyy $(1-\lambda)S$. Luonnollisesti oletetaan, että transaktiokulut eivät voi olla koko osakkeen myyntihinnan suuruisia, eli $\lambda < 1$. Reaalimaailman esimerkkinä transaktiokuluista ovat pankin osakkeiden kaupankäynnistä veloittamat kaupankäyntikulut.

Määritelmä 3.1. Olkoon hintaprosessi $S = (S_t)_{t=0}^T$ ja transaktiokulut $0 \leq \lambda < 1$. Määritellään vakavaraisuuskartio

$$K_t = \{(\varphi_t^0, \varphi_t^1) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^2) : \varphi_t^0 \geq \max(-\varphi_t^1 S_t, -\varphi_t^1 (1-\lambda) S_t)\}. \tag{18}$$

Sanotaan, että toimijan salkku on *vakavarainen* osakkeen hinnalla S_t, jos osakeposition realisoinnin (ts. likvidoinnin) jälkeen velkakirjapositio on ei-negatiivinen. Position realisaatiolla tarkoitetaan, että myydään φ_t^1 osaketta hinnalla $(1-\lambda)S_t$, jos $\varphi_t^1 > 0$ ja ostetaan $-\varphi_t^1$ kappaletta hinnalla S_t, jos $\varphi_t^1 < 0$.

Tapausta, jossa omistetaan negatiivinen määrä osakkeita kutsutaan lyhyeksi myymiseksi (ts. shorttaamiseksi): toimija lainaa osakkeen ja myy sen eteenpäin. Myöhemmin hän ostaa sen takaisin ja palauttaa lainaajalleen. Toimija saattaa shortata osaketta, jos hän uskoo osakkeen arvon laskemiseen. Esimerkiksi jos osakkeen a arvo ajanhetkellä 0 on 100 euroa ja toimija x lainaa yhden kappaleen osaketta ja myy sen markkinahintaan (100e) ajanhetkellä 0 toimijalle y. Nyt jos osakkeen arvo laskee ajan kuluessa siten, että ajanhetkellä t sen arvo on 90 euroa ja toimija x ostaa sen takaisin ja palauttaa sen lainaamalleen taholle, niin hän saa voittoa 10 euroa (vähennettynä transaktiokulut, verot ja muut kaupankäymiseen vaadittavat kulut). Osakkeita lyhyeksi myytäessä kannattaa ottaa huomioon se ero osakkeiden ostamiseen, että osakkeita ostaessa toimija saattaa hävitä vain alkuperäisen sijoittamansa rahasummansa kun taas shorttaamisessa ei periaatteessa ole mitään ylärajaa, sillä shortatun osakkeen arvo saattaa jatkaa kasvuaan.

Määritelmä 3.2. Prosessi $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)_{t=-1}^T$, joka aloittaa pisteestä $(\varphi_{-1}^0, \varphi_{-1}^1) = (0,0)$ on itsensä rahoittava (/itserahoittava), jos

$$(\varphi_t^0 - \varphi_{t-1}^0, \varphi_t^1 - \varphi_{t-1}^1) \in -K_t, \quad t = 0, ..., T. \tag{19}$$

Relaatio (19) pätee $\mathbb{P}$-m.v.

Itserahoittava prosessi tarkoittaa, että toimijan on mahdollista ostaa jokaisen ajanhetken portfolioipositio itselleen edeltävän aikahetken varallisuudella. Salkku siis rahoittaa itse itsensä. Nyt on hyvä määritellä kappaleen asetelmassa ehto tilanteesta, jossa on mahdollista saada salkulle tuottoa ilman riskiä, eli arbitraasimahdollisuus.

Määritelmä 3.3. Sanotaan, että prosessi $S = (S_t)_{t=0}^T$ tarjoaa arbitraasimahdollisuuden transaktiokulujen $0 \leq \lambda < 1$ ollessa voimassa, jos on olemassa itsensä rahoittava sijoitusstrategia $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)$, jonka alkupisteille pätee $\varphi_{-1}^0 = \varphi_{-1}^1 = 0$ siten, että

$$(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \geq (0,0) \quad \mathbb{P}\text{-m.v.} \tag{20}$$

ja

$$P\left[(\varphi_T^0, \varphi_T^1) > (0,0)\right] > 0. \tag{21}$$

Kohdan (20) vektoreita koskeva epäyhtälö tarkastellaan komponenteittain, eli $\varphi_T^0 \geq 0$ ja $\varphi_T^1 \geq 0$.

Määritelmä 3.4. Sanotaan, että S täyttää ei-arbitraasia-ehdon (NA^λ), jos se ei mahdollista arbitraasia transaktiokulujen $0 \leq \lambda < 1$ ollessa voimassa.

Markkinat tarjoavat siis arbitraasimahdollisuuden, jos alkuvarallisuudeltaan nollasalkun on mahdollista käydä kauppaa aikahetkillä $0, ..., T$ siten, että jokaisen aikahetken positio on mahdollista hankkia edellisen aikahetken varallisuudella ja lopputuloksena on, että lopetusajanhetkellä T toimijan salkun arvo on vähintääkin 0 ja positiivisella todennäköisyydellä arvo on suurempi kuin nolla. Tällöin on mahdollista "tyhjästä nyhjäistä" varallisuutta.

Oletetaan, että S ja $\lambda > 0$ ovat kiinnitettyjä. Merkitään merkinnällä $\mathcal{A}^\lambda$ $\mathbb{R}^2$-arvoisten $\mathcal{F}$-mitallisten satunnaismuuttujien (φ^0, φ^1) joukkoa, jolle on olemassa itsensärahoittava sijoitusstrategia $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)_{t=-1}^T$, jonka alkupiste on $(\varphi_{-1}^0, \varphi_{-1}^1) = (0,0)$, ja jolle pätee $(\varphi^0, \varphi^1) \leq (\varphi_T^0, \varphi_T^1)$.

Määritelmä 3.5. Sanotaan, että mitallinen joukko $F \subset \mathcal{F}$ on atomi, jos $E \subseteq F$, niin $E = F$ tai $E = \emptyset$. Atomi on siis mitallinen joukko, jonka mitta on positiivinen ja jolle pätee, että se ei sisällä mitään pienempää joukkoa, jonka mitta on positiivinen.

Lemma 3.1. Oletetaan, että S toteuttaa ei-arbitraasia ehdon (NA^λ), kiinteillä transaktiokuluilla $0 \leq \lambda < 1$. Tällöin joukko $\mathcal{A}^\lambda$ on suljettu polyedrinen kartio avaruudessa $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^2)$, johon sisältyy avaruus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}_-^2)$ ja lisäksi pätee, että $\mathcal{A}^\lambda \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}_+^2) = \{0\}$.

Todistus. Kiinnitetään ajanhetki $0 \leq t \leq T$ ja atomi $F \in \mathcal{F}_t$. Määritellään $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ avaruuden alkiot a_F ja b_F:

$$a_F = (-S_{t|F}, 1)\mathbb{1}_F, \qquad b_F = ((1-\lambda)S_{t|F}, -1)\mathbb{1}_F. \tag{22}$$

Notaatiolla $S_{t|F}$ tarkoitetaan arvoa, jonka (F_t-mitallinen) satunnaismuuttuja S_t saa F_t-mitallisessa joukossa F. $S_{t|F}$ on hyvin määritelty postiivinen luku. Toisin sanoen notaatiolla tarkoitetaan arvoa, jonka osakkeen hinnoitteluprosessi S_t saa tapahtuman F sattuessa. Kutsutaan alkioita a_F ja b_F tarjous- ja pyyntialkioiksi.

Alkiot a_F ja b_F kuuluvat joukkoon $\mathcal{A}^\lambda$. Ne voidaan rinnastaa sijoitusstrategiaan $(\varphi_s^0, \varphi_s^1)_{s=-1}^T$ siten, että $(\varphi_s^0, \varphi_s^1) = (0,0)$, kun $-1 \leq s < t$ ja $(\varphi_s^0, \varphi_s^1) = a_F$, kun $t \leq s \leq T$. Tapaus b_F saadaan vastaavasti. Sanallisesti tätä voi kuvailla niin, että toimija ei tee mitään ennen ajanhetkeä t ja tämän jälkeen ehdollisesti tapahtuman $F \in \mathcal{F}_t$ tapahtuessa toimija ostaa yhden osakkeen ja pitää sitä aina ajanhetkeen T asti. Tapauksessa b_F toimija pitää osaketta ajanhetkeen t asti ja tapahtuman F sattuessa tämä myy osakkeen. Tarjous- ja pyyntialkiot mallintavat siis yhden osakkeen transaktiota jollain kaupankäyntiaikavälin ajanhetkellä. Nyt voidaan itsensärahoittava sijoitusstrategia konstruoida näiden alkioiden (tai alkioiden moninkertojen) summana kaikkien kaupankäyntiaikahetkien yli.

Kartion $\mathcal{A}^\lambda$ määritelmän nojalla satunnaismuuttuja $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^2)$ kuuluu joukkoon $\mathcal{A}^\lambda$ jos, ja vain jos on olemassa epänegatiiviset luvut u_F ja v_F, missä F käy läpi joukkojen $\mathcal{F}_t, t = 0, ..., T$ alkiot läpi siten, että

$$(\varphi^0, \varphi^1) \leq \sum_F (u_F a_F + v_F b_F). \tag{23}$$

Toisin sanoen tarjous- ja pyyntialkiot ja vektorit $(-1,0)\mathbb{1}_\omega$ ja $(0,-1)\mathbb{1}_\omega$, missä ω käy läpi alkiot joukossa Ω muodostavat kartion $\mathcal{A}^\lambda$. Tästä seuraa, että $\mathcal{A}^\lambda$ on suljettu polyedrinen kartio.

Negatiivisen neljänneksen sisältyvyys $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}_-^2) \subseteq \mathcal{A}^\lambda$ on selvä, sillä sehän olisi vain varallisuuden antamista pois. Kartion $\mathcal{A}^\lambda$ ja positiivisen neljänneksen leikkaus on $\mathcal{A}^\lambda \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}_+^2) = \{0\}$. Tämä on yhtäpitävää ei arbitraasia ehdon (NA^λ) kanssa.

$\square$

Määritelmä 3.6. Alkio $(\varphi^0, \varphi^1) \in \mathcal{A}^\lambda$ on maksimi, jos jokaisella alkiolla $(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1) \in \mathcal{A}^\lambda$, joka toteuttaa ehdon $(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1) \geq (\varphi^0, \varphi^1)$ m.v., pätee $(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1) = (\varphi^0, \varphi^1)$.

Määritelmä 3.7. Kiinnitetään prosessi $S = (S_t)_{t=0}^T$ ja transaktiokulut $0 \leq \lambda < 1$. Yhtenäinen hinnoittelumalli on pari $(\tilde{S}, Q)$ siten, että Q on ekvivalentti todennäköisyysmitan P kanssa avaruudessa Ω, ja $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t=0}^T$ on Q-martingaali, joka saa arvonsa tarjous- ja pyyntihintojen välillä $[(1-\lambda)S, S]$ eli

$$(1-\lambda)S_t \leq \tilde{S}_t \leq S_t, \qquad P\text{-m.v.} \tag{24}$$

Merkitään yhtenäisten hinnoittelumallien joukkoa merkinnällä $\mathcal{S}^\lambda$. Tarkastellaan ennen tämän kappaleen pääteoreemaa, rahoitusteorian peruslausetta vielä viimeinen lemma, jonka tulosta käytetään peruslauseen todistuksessa.

Lemma 3.2. On olemassa duaaliavaruuden alkio $Z = (Z^0, Z^1) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$, jolle pätee $Z^0(\omega) > 0$ ja $Z^1(\omega) \geq 0$, kaikilla $\omega \in \Omega$, jonka odotusarvo on $E_P[Z^0] = 1$ siten, että

$$\langle (\varphi_T^0, \varphi_T^1), (Z^0, Z^1) \rangle = E_P\left[\varphi_T^0 Z^0 + \varphi_T^1 Z^1\right] \leq 0, \tag{25}$$

kaikilla $(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in \mathcal{A}^\lambda$.

Todistus. Kiinnitetään $\omega \in \Omega$ ja tarkastellaan alkiota $(\mathbb{1}_\omega, 0) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$, joka ei kuulu kartioon $\mathcal{A}^\lambda$. Tiedetään, että $\mathcal{A}^\lambda$ on suljettu ja konveksi. Käyttämällä separoituvan hypertason teoreemaa voidaan löytää kiinteällä $\omega \in \Omega$ alkio (hypertaso) $Z_\omega \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{R}^2)$, joka erottaa joukon $\mathcal{A}^\lambda$ ja alkion $(\mathbb{1}_\omega, 0)$. Koska $\mathcal{A}^\lambda$ on kartio, niin tällöin alkiolle Z_ω pätee

$$\langle (\mathbb{1}_\omega, 0), (Z_\omega^0, Z_\omega^1) \rangle > 0, \tag{26}$$

ja lisäksi $\langle (\varphi^0, \varphi^1), (Z_\omega^0, Z_\omega^1) \rangle \leq 0$, kaikilla $(\varphi^0, \varphi^1) \in \mathcal{A}^\lambda$. Ensimmäisestä epäyhtälöstä saadaan, että alkio $Z_\omega^0 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ saa aidosti positiivisia arvoja tapahtuman ω sattuessa eli

$$Z_\omega^0(\omega) > 0. \tag{27}$$

Negatiivinen neljännes $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}_-^2)$ sisältyy kartioon $\mathcal{A}^\lambda$, joten toisesta epäyhtälöstä $\langle (\varphi^0, \varphi^1), (Z_\omega^0, Z_\omega^1) \rangle \leq 0,\ \forall (\varphi^0, \varphi^1) \in \mathcal{A}^\lambda$ seuraa, että

$$Z_\omega^0 \geq 0, \qquad Z_\omega^1 \geq 0. \tag{28}$$

Tehdään tämä konstruktio kaikilla lähtöavaruuden alkioilla $\omega \in \Omega$ ja määritellään

$$Z = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_\omega Z_\omega, \tag{29}$$

missä $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ovat aidosti positiivisia skalaareita, jotka on valittu siten, että alkion Z ensimmäiselle koordinaatille pätee $E[Z^0] = 1$. Vastaavanlaisella päättelyllä saadaan alkio $Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ siten, että

$$\langle(\varphi^0, \varphi^1), (Z^0, Z^1)\rangle \leq 0, \ \forall(\varphi^0, \varphi^1) \in \mathcal{A}^\lambda \tag{30}$$

mikä tarkoittaa samaa kuin (25), ja lisäksi taas

$$Z^0 > 0 \qquad Z^1 \geq 0, \tag{31}$$

mikä osoittaa väitteen. □

3.2 Rahoitusteorian peruslause ja korollaarit

Teoreema 3.1. (Rahoitusteorian peruslause). Kiinnitetään prosessi $S = (S_t)_{t=0}^T$ ja transaktiokulut $0 \leq \lambda < 1$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.

(1) Ei-arbitraasia ehto (NA^λ) on voimassa.

(2) On olemassa yhtenäinen hinnoittelumalli $(\tilde{S}, Q) \in \mathcal{S}^\lambda$.

(3) On olemassa $\mathbb{R}_+^2$ arvoinen P-martingaali $(Z_t)_{t=0}^T = (Z_t^0, Z_t^1)_{t=0}^T$ siten, että $Z_0^0 = 1$ ja

$$\frac{Z_t^1}{Z_t^0} \in [(1-\lambda)S_t, S_t], \qquad t = 0, ..., T. \tag{32}$$

Todistus. (2) $\Longrightarrow$ (1). Oletetaan, että $(\tilde{S}, Q)$ on yhtenäinen hinnoittelumalli. Tarkastellaan sijoitusstrategiaa $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)_{t=-1}^T$, joka lähtee pisteestä $(0, 0)$. Määritelmän mukaan $\tilde{S}$ saa arvonsa kohdan (24) hinnoitteluvälillä $[(1-\lambda)S_t, S_t]$. Ensin haetaan sijoitusstrategialle yläraja käyttämällä vakavaraisuuskartion määritelmää:

$$\begin{aligned} \varphi_t^0 - \varphi_{t-1}^0 &\leq \min\left(-(\varphi_t^1 - \varphi_{t-1}^1)S_t, -(\varphi_t^1 - \varphi_{t-1}^1)(1-\lambda)S_t\right) \\ &\leq -(\varphi_t^1 - \varphi_{t-1}^1)\tilde{S}_t, \end{aligned} \tag{33}$$

kun $(\varphi_t^0 - \varphi_{t-1}^0, \varphi_t^1 - \varphi_{t-1}^1) \in -K_t$. Käytetään saatua ylärajaa ja rajoitetaan velkakirjojen lukumäärän muutosta aikavälillä $[-1, T]$:

$$\begin{aligned} (\varphi_T^0 - \varphi_{-1}^0) &= \sum_{t=0}^T (\varphi_t^0 - \varphi_{t-1}^0) \\ &\leq -\sum_{t=0}^T (\varphi_t^1 - \varphi_{t-1}^1)\tilde{S}_t \\ &= \sum_{t=1}^T \varphi_{t-1}^1(\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) + \varphi_{-1}^1\tilde{S}_0 - \varphi_T^1\tilde{S}_T. \end{aligned} \tag{34}$$

Otetaan puolittain edellisestä yhtälöstä odotusarvot mitan Q suhteen ja käytetään tietoa $\varphi^0_{-1} = \varphi^1_{-1} = 0$. Nyt odotusarvolle saadaan arvio

$$E_Q[\varphi^0_T - \underbrace{\varphi^0_{-1}}_{=0}] \leq E_Q\left[\sum_{t=1}^{T} \varphi^1_{t-1}(\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1})\right] + E_Q[\underbrace{\varphi^1_{-1}}_{=0}\tilde{S}_0] - E_Q[\varphi^1_T \tilde{S}_T] \tag{35}$$

Tämä on yhtäpitävää arvion

$$E_Q[\varphi^0_T] + E_Q[\varphi^1_T \tilde{S}_T] \leq E_Q\left[\sum_{t=1}^{T} \varphi^1_{t-1}(\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1})\right] = 0. \tag{36}$$

kanssa.

Oletetaan, että bondien ja osakkeiden lukumäärä ajanhetkellä T on epänegatiivinen P-melkein varmasti.

Käytetään tietoa, että mitta Q ekvivalentti mitan P kanssa, eli $Q(\omega) > 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Nyt ylläolevan epäyhtälön perusteella voidaan päätellä, että $\varphi^0_T(\omega) = 0$ ja $\varphi^1_T(\omega)\tilde{S}_T(\omega) = 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Tiedetään, että osakkeen hintaa mallintava prosessi S saa vain positiivisia arvoja ja koska $0 < \lambda < 1$, niin tällöin arvo $\tilde{S}_T$ on aidosti positiivinen ja siten kaikilla $\omega \in \Omega$ pätee $\varphi^1_T(\omega) = 0$. Näistä tiedoista saadaan pääteltyä, että aloitushetken nollasalkusta ei ole mahdollista johtaa lopetushetkelle positiivista varallisuutta, eli prosessilla S ei ole arbitraasimahdollisuutta. Siten S toteuttaa ehdon (NA^λ).

(1) $\Longrightarrow$ (3). Oletetaan, että prosessi S toteuttaa ei-arbitraasia ehdon (NA^λ). Väitteen 3.1 mukaan tiedetään, että $\mathcal{A}^\lambda$ on suljettu polyedrinen kartio avaruudessa $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ jolle pätee

$$\mathcal{A}^\lambda \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2_+) = \{0\}. \tag{37}$$

Tarkastellaan väitteen 3.2 satunnaismuuttujaa Z ja määritellään sille $\mathbb{R}^2$-arvoinen martingaali $(Z_t)_{t=0}^T$:

$$Z_t = E[Z|\mathcal{F}_t], \qquad t = 0, ..., T. \tag{38}$$

Nyt tavoitteena on tarkastella, että $\frac{Z^1_t}{Z^0_t}$ saa arvonsa osakkeen S_t tarjous- ja pyyntihintojen välillä $[(1-\lambda)S_t, S_t]$. Käyttämällä kohtaa (30) aikaisemmin määritellylle tarjousalkiolle $a_F = (-S_{t|F}, 1)\mathbb{1}_F$, kun $F \in \mathcal{F}_t$, saadaan

$$\langle (Z^0_t, Z^1_t), (-S_{t|F}, 1)\mathbb{1}_F \rangle = E[(-S_{t|F} Z^0_t + Z^1_t)\mathbb{1}_F] \leq 0. \tag{39}$$

Edelleen tätä voidaan sieventää käyttämällä alkion $S_t \mathbb{1}_F$ $\mathcal{F}_t$-mitallisuutta muotoon:

$$E[(-S_{t|F} Z^0_t + Z^1_t)\mathbb{1}_F] = E[(-S_{t|F} Z^0_{t|F} + Z^1_{t|F})\mathbb{1}_F] \leq 0. \tag{40}$$

Nyt viimeisen odotusarvon kaikki tekijät $S_{t|F}, Z^0_{t|F}$ ja $Z^0_{t|F}$ ovat vakioita, jolloin odotusarvo on sama kuin sulkujen sisällä oleva:

$$-S_{t|F} Z^0_{t|F} + Z^1_{t|F} \leq 0, \tag{41}$$

eli uudelleen järjestettynä

$$\frac{Z^1_{t|F}}{Z^0_{t|F}} \leq S_{t|F}. \tag{42}$$

Tämä epäyhtälö pätee kaikilla kaupankäynti aikahetkillä $t = 0, ..., T$ ja jokaisella tapahtumalla $F \in \mathcal{F}_t$. Nyt

$$\frac{Z^1_t}{Z^0_t} \in]-\infty, S_t], \quad t = 0, ..., T, \tag{43}$$

sillä yllä oleva epäyhtälö (42) pätee kaikilla $t = 0, ..., T$ ja jokaisella tapahtumalla $F \in \mathcal{F}_t$. Voidaan käydä vastaava tarkastelu alkiolle $b_F = ((1-\lambda)S_{t|F}, -1)\mathbb{1}_F$ ja saadaan

$$\langle (Z^0_t, Z^1_t), (((1-\lambda)S_{t|F}), -1)\mathbb{1}_F\rangle = E[((1-\lambda)S_{t|F}Z^0_t - Z^1_t)\mathbb{1}_F] \leq 0. \tag{44}$$

Odotusarvo sievenee muotoon

$$E[((1-\lambda)S_{t|F}Z^0_{t|F} - Z^1_{t|F})\mathbb{1}_F] \leq 0, \tag{45}$$

missä kaikki tekijät ovat vakioita. Tämän seurauksena saadaan, että

$$(1-\lambda)S_{t|F}Z^0_{t|F} - Z^1_{t|F} \leq 0. \tag{46}$$

Tällä päättelyllä saadaan osoitettua väitteen toinen puoli

$$(1-\lambda)S_{t|F} \leq \frac{Z^1_{t|F}}{Z^0_{t|F}}, \tag{47}$$

kaikilla $t = 0, ..., T$ ja $F \in \mathcal{F}_t$. Tämä voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi

$$\frac{Z^1_t}{Z^0_t} \in [(1-\lambda)S_t, \infty[, \quad t = 0, ..., T. \tag{48}$$

Yhdistämällä kohdat (43) ja (48) saadaan, että $\dfrac{Z^1_t}{Z^0_t} \in [(1-\lambda)S_t, S_t]$. Prosessin $(Z^1_t)^T_{t=0}$ positiivisuus saadaan yhtälöstä $\frac{Z^1_t}{Z^0_t} \in [(1-\lambda)S_t, \infty[$ ja tiedosta, että transaktiokuluille pätee $0 < \lambda < 1$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) Määritellään mitta Q joukkoperheessä $\mathcal{F}$ seuraavasti

$$\frac{dQ}{dP} = Z^0_T, \tag{49}$$

jolloin saadaan mitan P kanssa ekvivalentti todennäköisyysmitta.
Määritellään prosessi $\tilde{S} = (\tilde{S})^T_t$

$$\tilde{S}_t = \frac{Z^1_t}{Z^0_t} \tag{50}$$

Tiedetään, että prosessi $\tilde{S}$ saa arvonsa prosessin S tarjous- ja pyyntihintojen välillä $[(1-\lambda)S_t, S_t]$. Jotta saadaan osoitettua, että $\tilde{S}$ on Q-martingaali riittää huomata, että se on ekvivalentti sen kanssa, että $\tilde{S}Z^0$ on P-martingaali, mikä on totta sillä $Z^1 = \tilde{S}Z^0$. $\square$

Kartion $\mathcal{A}^\lambda$ napajoukko $\mathcal{B}^\lambda$ on määritelmän 2.6 kohdan (5) nojalla

$$\mathcal{B}^\lambda = \{Z = (Z^0, Z^1) : E_P[\varphi^0 Z^0 + \varphi^1 Z^1] \leq 0, \text{ kaikilla } (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{A}^\lambda\}. \tag{51}$$

Koska $\mathcal{A}^\lambda$ on suljettu polyedrinen kartio äärellisulotteisessa avaruudessa, niin tällöin myös sen napajoukko $\mathcal{B}^\lambda$ on suljettu polyedrinen kartio äärellisulotteisessa avaruudessa. Negatiivinen neljännes $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2_-) = \{(\varphi^0_T, \varphi^1_T) : \varphi^0_T \leq 0, \varphi^1_T \leq 0\}$ sisältyy kartioon $\mathcal{A}^\lambda$, niin tällöin sen napajoukko $\mathcal{B}^\lambda$ sisältyy positiiviseen neljännekseen $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2_+)$.

Tarkastellaan kappaleen loppuun vielä kolme rahoitusteorian peruslauseesta johdettua korollaaria Schachermayerin teoksesta [1]. Ensimmäistä käytetään jälkimmäisten todistuksessa ja nämä kaksi viimeistä korollaaria ovat superreplikointiteoreema ja sen yksiulotteinen versio, joista yksiulotteista versiota käytetään seuraavan kappaleen optimointiongelmien ratkaisun haussa. Korollaarien sanomana on, että jos on olemassa itsensärahoittava sijoitusstrategia, niin tällöin jokaiselle yhtenäiselle hinnoittelumallille pätee relaatio, jossa odotusarvollinen (mitan Q suhteen) lopetusarvo on korkeintaan toimijan alkuvarallisuuden arvo lopetusajanhetkellä.

Korollaari 3.1. Oletetaan, että S toteuttaa ei-arbitraasia ehdon (NA^λ) transaktiokulujen $0 \leq \lambda < 1$ voimassa ollessa. Olkoon $Z = (Z^0, Z^1) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ ja määritellään sille martingaali $Z_t = E_P[Z|\mathcal{F}_t]$, missä $t = 0, ..., T$. Määritellään prosessi $\tilde{S}_t := \frac{Z^1_t}{Z^0_t}$.

Tällöin

$$Z \in \mathcal{B}^\lambda \iff \tilde{S}_t \in [(1-\lambda)S_t, S_t], \text{ kun } \{Z^0_t \neq 0\} \text{ ja } Z^1_t = 0, \text{ kun } \{Z^0_t = 0\}, \tag{52}$$

kaikilla $t = 0, ..., T$.

Lisäksi alkio $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ kuuluu kartioon $\mathcal{A}^\lambda$, jos ja vain jos jokaiselle yhtenäiselle hinnoittelumallille $(\tilde{S}, Q)$ pätee

$$E_Q[\varphi^0 + \varphi^1 \tilde{S}_T] \leq 0. \tag{53}$$

Todistus. Jos $Z = (Z^0, Z^1) \in \mathcal{B}^\lambda$, niin tällöin $Z \geq 0$, sillä tiedetään, että kartio $\mathcal{B}^\lambda$ kuuluu positiiviseen ortanttiin. Tekemällä samanlaisen tarkastelun kun rahoitusteorian peruslauseessa (teoreema 3.1) ehdolla $\{Z^0_t \neq 0\}$ saadaan, että $\tilde{S}_t := \frac{Z^1_t}{Z^0_t}$ saa arvonsa tarjous- ja pyyntihintojen välillä $[(1-\lambda)S_t, S_t]$, kun $t = 0, ..., T$.

Joukon $\{Z^0_t = 0\}$ tapauksessa kiinnitetään alkio $F_t \in \mathcal{F}_t$ siten, että $F_t \subseteq \{Z^0_t = 0\}$. Kuten edellisessäkin todistuksessa $(-S_{t|F_t}, 1)\mathbb{1}_{F_t} \in \mathcal{A}^\lambda$. Koska $Z \in (\mathcal{A}^\lambda)^\circ$ saadaan navan määritelmän nojalla

$$\langle (-S_t, 1)\mathbb{1}_{F_t}, (0, Z^1_t) \rangle \leq 0. \tag{54}$$

Tämä on yhtäpitävää, että

$$Z^1_{t|F} \leq 0, \tag{55}$$

mistä seuraa yleisemmin, että myös $Z^1_t = 0$ kaikilla $F_t \in \mathcal{F}_t$ kun $F_t \subseteq \{Z^0_t = 0\}$.

Käänteisesti, jos $Z = (Z^0, Z^1)$ toteuttaa $Z \geq 0$ ja $\frac{Z_t^1}{Z_t^0} \in [(1-\lambda)S_t, S_t]$ sekä yllä oleva tarkastelu tapaukselle $Z_t^0 = 0$, tällöin

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{1}_{F_t}(-S_t, 1), (Z^0, Z^1) \rangle &\leq 0, \\ \langle \mathbb{1}_{F_t}((1-\lambda)S_t, -1), (Z^0, Z^1) \rangle &\leq 0, \end{aligned} \tag{56}$$

kaikilla $F_t \in \mathcal{F}_t$. Yhtälöiden vasemmalla puolella olevan alkiot muodostavat kartion $\mathcal{A}^\lambda$, ja tästä saadaan, että $Z \in \mathcal{B}^\lambda$.

Käydään vielä väitteen toisen kohdan todistus. Bipolaariteoreeman nojalla ja tiedon, että $\mathcal{A}^\lambda$ on suljettu ja konveksi avaruudessa $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ saadaan kartion $\mathcal{A}^\lambda$ bipolaariseksi joukoksi kartio itse: $(\mathcal{A}^\lambda)^{\circ\circ} = (\mathcal{B}^\lambda)^\circ = \mathcal{A}^\lambda$. Täten $(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in \mathcal{A}^\lambda = (\mathcal{A}^\lambda)^{\circ\circ}$ jos ja vain jos jokaisella $Z = (Z^0, Z^1) \in \mathcal{B}^\lambda$ pätee

$$E_P[Z^0\varphi_T^0 + Z^1\varphi_T^1] \leq 0. \tag{57}$$

Tämä on ekvivalentti kohdan (53) kanssa, jos Z^0 on aidosti positiivinen ja $\frac{dQ}{dP} := \frac{Z^0}{E_P[Z^0]}$ ja lisäksi $\tilde{S}_t = E_P[Z^1|\mathcal{F}_t]/E_P[Z^0|\mathcal{F}_t]$ on hyvinmääritelty yhtenäinen hinnoittelumalli.

Täytyy tarkastella vielä tapaus jolloin Z^0 voi saada myös arvon 0, jotta saadaan johdettua kohta (53) kohdasta (57). Oletuksen, että (NA^λ) on voimassa ja rahoitusteorian peruslauseen nojalla tiedetään, että on olemassa $\overline{Z} = (\overline{Z}^0, \overline{Z}^1)$ siten, että $\overline{Z}^0$ ja $\overline{Z}^1$ ovat aidosti positiivisia. Mielivaltaisella $Z = (Z^0, Z^1) \in \mathcal{B}^\lambda$ ja $\mu \in]0,1]$ pätee, että konveksi kombinaatio $\mu\overline{Z} + (1-\mu)Z$ kuuluu kartioon $\mathcal{B}^\lambda$ ja on aidosti positiivinen. Nyt voidaan johtaa (53) kohdasta (57) käyttämällä kombinaatiota $\mu\overline{Z} + (1-\mu)Z$. Nyt μ :n lähestyessä nollaa voidaan päätellä, että $(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in \mathcal{A}^\lambda$ jos ja vain jos kohta (53) on voimassa kaikilla yhtenäisillä hinnoittelumalleilla $(\tilde{S}, Q)$. □

Korollaari 3.2. (Superreplikointiteoreema) Kiinnitetään prosessi $S = (S_t)_{t=0}^T$ ja transaktiokulut $0 \leq \lambda < 1$. Oletetaan lisäksi, että (NA^λ) on voimassa. Olkoot $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ ja alkio $(x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2$ kiinnitettyjä. Seuraavat kaksi ehtoa ovat ekvivalentit:

1. $(\varphi^0, \varphi^1) = (\varphi_T^0, \varphi_T^1)$ jollekin itsensärahoittavalle sijoitusstrategialle $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)_{t=0}^T$, joka lähtee pisteestä $(\varphi_{-1}^0, \varphi_{-1}^1) = (x^0, x^1)$.

2. $E_Q[\varphi^0 + \varphi^1\tilde{S}_T] \leq x^0 + x^1\tilde{S}_0$, jokaisella yhtenäisellä hinnoittelumallilla $(\tilde{S}, Q) \in \mathcal{S}^\lambda$.

Todistus. Ehto (1) on ekvivalentti sen kanssa, että $(\varphi^0 - x^0, \varphi^1 - x^1)$ kuuluu joukkoon $\mathcal{A}^\lambda$. Korollaarin 3.1 mukaan tämä on ekvivalentti epäyhtälön

$$E_Q[(\varphi^0 - x^0) + (\varphi^1 - x^1)\tilde{S}_T] \leq 0, \tag{58}$$

kaikilla $(\tilde{S}, Q) \in \mathcal{S}^\lambda$, mikä taas on yhtäpitävää ehdon (2) kanssa. □

Voidaan erikoistaa yllä oleva tulos, missä toimijalla on alkuvarallisuutta vain bondeissa. Tarkastellaan sijoitusstrategiaa $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)_{t=-1}^T$, ja prosessi lähtee pisteestä $(\varphi_{-1}^0, \varphi_{-1}^1) = (x, 0)$. Oletetaan myös, että $(\varphi_T^0, \varphi_T^1)$ toteuttaa yhtälön $\varphi_T^1 = 0$. Eli toimija ei omista yhtäkään osaketta aloitusajanhetkellä ja toimija likvidoi positionsa lopetusajanhetkellä. Tästä lähtökohdasta tarkastellaan seuraavassa kappaleessa utiliteetin maksimointiteoriaa.

Merkitään kartiota, joka muodostuu saatavista (claim) merkinnällä $\mathcal{C}^\lambda$, jotka saadaan johdettua alkuvarallisuudesta $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\lambda &= \{\varphi^0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) : \exists(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in \mathcal{A}^\lambda \text{ s.e. } \varphi_T^0 \geq \varphi^0, \varphi_T^1 \geq 0\} \\ &= \mathcal{A}^\lambda \cap L_0^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{59}$$

Yllä merkinnällä $L_0^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ tarkoitetaan avaruuden $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ osajoukkoa, jonka muodostaa alkiot (φ^0, φ^1), missä $\varphi^1 = 0$. Identifioidaan avaruus $L_0^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^2)$ avaruuden $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kanssa samaksi.

Määritelmän (59) ja väitteen (3.1) mukaan $\mathcal{C}^\lambda$ on suljettu polyedrinen kartio. Käytetään tämän kartion polaariselle joukolle merkintää $\mathcal{D}^\lambda := (\mathcal{C}^\lambda)^\circ$. Yhtälöstä (59) saadaan johdettua polaarisen joukon yhtälö muotoon:

$$\mathcal{D}^\lambda = \{Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) : \exists Z = (Z^0, Z^1) \in \mathcal{B}^\lambda \text{ s.e. } Y = Z^0\}, \tag{60}$$

ja tämä on polyedrinen kartio avaruudessa $L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Käytetään merkintää $\mathcal{M}^\lambda$ joukon $\mathcal{D}^\lambda$ todennäköisyysmitoille eli

$$\mathcal{M}^\lambda = \mathcal{D}^\lambda \cap \{Y : E_P[Y] = 1\}. \tag{61}$$

Aikaisempi korollaari 3.2 (Superreplikointiteoreema) voidaan nyt muodostaa tapauksessa, jolloin toimijalla on alkuvarallisuutta $(x, 0)$ vain bondeissa ja varallisuuden positio osakkeissa likvidoidaan ajanhetkellä T.

Korollaari 3.3. (Yksiulotteinen superreplikointiteoreema). Kiinnitetään prosessi $S = (S_t)_{t=0}^T$ ja transaktiokulut $0 \leq \lambda < 1$. Lisäksi oletetaan, että ei-arbitraasia ehto (NA^λ) on voimassa. Olkoon $\varphi^0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja annettu luku $x \in \mathbb{R}$. Seuraavat ehdot ovat nyt yhtäpitäviä:

1. $\varphi^0 - x \in \mathcal{C}^\lambda$
2. $E_Q[\varphi^0] \leq x$ kaikilla $Q \in \mathcal{M}^\lambda$.

Todistus. Ehto (1) on ekvivalentti sen kanssa, että $(\varphi^0 - x, 0) \in \mathcal{A}^\lambda$. Tämä puolestaan voidaan kirjoittaa muodossa $E_Q[\varphi^0 - x] \leq 0$, kaikilla $Q \in \mathcal{M}^\lambda$, mikä taas on ekvivalentti ehdon (2) kanssa. □

Nyt voidaan siirtyä tarkastelemaan utiliteettiteoriaa. On määritelty riittävät työkalut ja menetelmät, jotta saadaan ratkaistua seuraavan kappaleen optimointiongelmat.

4 Utiliteetin maksimointi

Jatketaan edellisen kappaleen asetelmaa, eli tarkasteltavana on äärellinen filteroitu todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, P)$, jossa osakkeen hinnan määrää diskreettiaikainen prosessi $S = (S_t)_{t=0}^T$. Oletetaan lisäksi, että transaktiokulut määräytyvät vakiosta $0 \leq \lambda < 1$ kuten aiemmin.

Kappaleessa tarkastellaan utiliteettiteoriaa transaktiokulujen tapauksessa ja tarkoituksena on löytää optimaalinen sijoitusstrategia, jolla saadaan maksimoitua toimijan tavoittelema hyöty (utiliteetti) sijoitukselleen. Tämänlaiset optimointiongelmat ovat klassinen taloustieteen aihealue ja tässä työssä rajoitutaan käsittelemään aihetta transaktiokulujen näkökulmasta.

4.1 Optimointiongelmien määrittely

Määritelmä 4.1. Määritellään utiliteettifunktio konkaavina, kasvavana ja reaalilukuarvoisena funktiona U

$$U : D \to \mathbb{R}, \tag{62}$$

missä lähtöjoukko D on joko $D =]0, \infty[$ tai $D =] - \infty, \infty[$ riippuen utiliteettifunktiosta.

Kahtena esimerkkinä erilaisista utiliteettifunktioista voidaan antaa logaritminen utiliteettifunktio $U_1(x) = \log(x)$, jonka lähtöjoukko on $D_1 =]0, \infty[$ ja eksponentiaalinen $U_2(x) = -\exp(-\mu x)$, $\mu > 0$, jonka lähtöjoukko on $D_2 =] - \infty, \infty[$. Jälkimmäinen näistä utiliteettifunktioista siis sallii negatiivisen varallisuuden ja ensimmäinen ei.

Määritelmä 4.2. Sanotaan, että utiliteettifunktio U toteuttaa Inadan ehdot, jos

$$\lim_{x \searrow x_0} U'(x) = \infty \quad \lim_{x \nearrow \infty} U'(x) = 0, \tag{63}$$

missä $x_0 \in \{-\infty, 0\}$ tarkoittaa lähtöjoukon D vasenta reunapistettä, joka riippuu valitusta utiliteettifunktiosta.

Kiinnitetään toimijan käyttämä utiliteettifunktio

$$U : D \to \mathbb{R} \tag{64}$$

ja oletetaan, että se on aidosti konkaavi ja differentioituva lähtöjoukon sisäpisteiden muodostamassa joukossa $\mathrm{int}(D)$. Lisäksi oletetaan, että se toteuttaa kohdan (63) Inada ehdot.

Optimointiongelma 1. Kiinnitetään toimijan alkuvarallisuus velkakirjoissa $x \in D$. Tavoitteena on löytää sopiva sijoitusstrategia $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)_{t=-1}^T$, jolla saadaan maksimoitua lopullisen varallisuuden odotettu utiliteetti. Tämä voidaan käsittää optimointiongelmana:

$$\begin{aligned} &E\left[U(x + \varphi_T^0)\right] \to \max, \\ &\varphi_T^0 \in \mathcal{C}^\lambda. \end{aligned} \tag{65}$$

Yllä olevia merkintöjä luetaan siten, että merkinnöillä tarkoitetaan optimointiongelmaa, jossa halutaan maksimoida utiliteettifunktion kuvaaman arvon odotusarvo, kun bondien lukumäärä loppuhetkellä T kuuluu joukkoon $\mathcal{C}^\lambda$. Muistutuksena kartion $\mathcal{C}^\lambda$ muodostavat itsensärahoittavat sijoitusstrategiat, jotka pystytään johtamaan alkuvarallisuudesta $(0,0)$. Tarkasteltavana on sijoitusstrategia, joka aloittaa kohdasta $(x,0)$, missä x on toimijan omistamien bondien lukumäärä alkuhetkellä ja toimijalla ei ole positiota osakkeissa aloitushetkellä. Kaupankäynti tapahtuu ajanhetkillä $t = 0, ..., T-1$, jonka jälkeen toimija realisoi osakepositionsa ajanhetkellä T. Sijoitusstrategian paremmuutta mittaa nyt tästä näkökulmasta katsottuna toimijan mieltymys (preferenssi), eli utiliteettifunktio U.

Utiliteetin maksimointiongelma voitaisiin tehdä yleisemmässä tapauksessa, jossa toimijalla on alkuvarallisuutta (x,y) sekä osakkeissa että bondeissa ilman, että rajoitutaan tapaukseen $(x,0)$. On riittävää tarkastella yksinkertaisempaa kohdan (65) optimointiongelmaa, sillä tämä mahdollistaa helpompien ja selkeämpien tulosten formalisoinnin. Yleisemmästä tapauksesta voi lukea esimerkiksi Kabanovin ja Mherin teoksesta Markets With Transaction Costs [3].

Formalisoidaan ensimmäinen optimointiongelma uudelleen konkaavina maksimointiongelmana, jota rajoittaa lineaariset rajoitteet käyttämällä yksiulotteista superreplikointiteoreemaa (korollaari 3.3).

Optimointiongelma 2.

$$\begin{aligned} &E\left[U(x+\varphi_T^0)\right] \to \max, && \varphi_T^0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P), \\ &E_Q[\varphi_T^0] \leq 0, && Q \in \mathcal{M}^\lambda. \end{aligned} \tag{66}$$

Nyt joukko $\mathcal{M}^\lambda$ on siis avaruuden Ω todennäköisyysmittojen osajoukko, joka koostuu mitoista, joita rajoittaa äärellisen monet lineaariset rajoitteet ja täten se on kompakti polyedri. Siten on yhtäpitävää kirjoittaa se kompaktin polyedrin äärellisen monen ääriarvon muodostaman joukon konveksina peitteenä. Nyt voidaan äärettömän monet rajoitteet $Q \in \mathcal{M}^\lambda$ vaihtaa äärellisen moneksi: on riittävää, että ehto $E_Q[\varphi_T^0] \leq 0$ on voimassa vain ääriarvo kohdilla $(Q^1, ..., Q^M)$, missä $Q^i \in \mathcal{M}^\lambda, i = 1...M$.

Määritellään utiliteettifunktiolle U konjugaattifunktio V

$$V(y) = \sup_{x \in D}\{U(x) - xy\}, \quad y > 0. \tag{67}$$

Tämä on kuvauksen $x \to -U(-x)$ Legendre-muunnos. Koska funktio $U(x)$ on aidosti konkaavi, niin tämän seurauksena $V(y)$ on aidosti konveksi. Delbaen ja Schachermayerin teoksen [2] proposition 3.1.2. mukaan konjugaattifunktiosta V voidaan johtaa tehtyjen oletusten vallitessa alkuperäinen funktio muunnoksella $U(x) = \inf_{y>0}\{V(y) + xy\}$, missä $x \in D$.

4.2 Pääteoreema ja optimointiongelmien ratkaisu

Formalisoidaan nyt työn pääteoreema, jonka todistuksessa löydetään Lagrangen satulapisteen avulla optimointiongelmien ratkaisu.

Teoreema 4.1. Olkoon $0 \leq \lambda < 1$ ja oletetaan, että ei-arbitraasia (NA^{λ}) ehto on voimassa transaktiokulujen vallitessa. Merkitään u:lla ja v:llä seuraavia funktioita

$$\begin{aligned} u(x) &= \sup\{E[U(x+\varphi_T^0)] : (\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in \mathcal{A}^{\lambda}, \varphi_T^1 \geq 0\} \\ &= \sup\{E[U(x+\varphi_T^0)] : \varphi_T^0 \in \mathcal{C}^{\lambda}\}, \qquad\qquad x \in D, \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} v(y) &= \inf\{E[V\left(y\frac{dQ}{dP}\right)] : Q \in \mathcal{M}^{\lambda}\} \\ &= \inf\{E[V(Z_T^0)] : Z_T = (Z_T^0, Z_T^1) \in \mathcal{B}^{\lambda}, E[Z_T^0] = y\}, \quad y > 0. \end{aligned} \tag{69}$$

Yllä olevissa yhtälöissä käytettiin sievennyksessä kohtia (59), (60) ja (61). Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

1. Funktiot $u(x)$ ja $v(x)$ ovat konjugaatteja ja funktio $u : D \to \mathbb{R}$ on sileä, konkaavi, kasvava ja toteuttaa Inada ehdot (63).

2. Jos $x \in D$, $y > 0$ ja yhtälö $u'(x) = y$ pätee, niin tällöin optimoijat $\hat{\varphi}_T^0 = \hat{\varphi}_T^0(x) \in \mathcal{C}^{\lambda}$ ja $\hat{Q} = \hat{Q}(y) \in \mathcal{M}^{\lambda}$ yhtälöissä (68) ja (69) ovat olemassa, yksikäsitteisiä ja toteuttavat yhtälöt

$$x + \hat{\varphi}_T^0 = I\left(y\frac{d\hat{Q}}{dP}\right), \quad y\frac{d\hat{Q}}{dP} = U'(x+\hat{\varphi}_T^0), \tag{70}$$

   missä $I = (U')^{-1} = -V'$ tarkoittaa käänteisfunktiota. Mitta $\hat{Q}$ on ekvivalentti mitan P kanssa eli $\hat{Q}$ kuvaa aidosti positiivisia arvoja jokaisella $\omega \in \Omega$.

3. Seuraavat kaavat u':lle ja v':lle ovat voimassa:

$$\begin{aligned} u'(x) &= E_P\left[U'\left(x+\hat{\varphi}_T^0(x)\right)\right], \\ v'(y) &= E_{\hat{Q}(y)}\left[V'(y\frac{d\hat{Q}(y)}{dP})\right], \\ xu'(x) &= E_P\left[\left(x+\hat{\varphi}_T^0(x)\right)U'\left(x+\hat{\varphi}_T^0(x)\right)\right], \\ yv'(y) &= E_P\left[y\frac{d\hat{Q}(y)}{dP}V'\left(y\frac{d\hat{Q}(y)}{dP}\right)\right]. \end{aligned} \tag{71}$$

Todistus. Todistuksessa seurataan Schachermayerin teoksen [1] teoreeman 2.2 rakennetta, johon on täydennetty pohdintaa sekä kerätty yksityiskohtia Delbaen, Freddyn ja Schachermayerin kirjan [2] kappaleista 3.1 ja 3.2, missä samaa aihetta käsitellään sekä kitkattomassa että kitkallisessa markkinassa, jossa transaktioilla on kuluja.

Merkitään joukon Ω alkioita $\{\omega_1, ..., \omega_N\}$ ja identifioidaan funktio $\varphi^0 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vektorin $(\xi_n)_{n=1}^N = (\varphi^0(\omega_n))_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ kanssa.

Merkitään kompaktin polyedrin $\mathcal{M}^\lambda$ ääriarvoja $Q^1, ..., Q^M$ ja merkitään mitan Q^m painoja $(q_n^m)_{n=1}^N = (Q^m[\omega_n])_{n=1}^N$, kun $1 \le m \le M$. Nyt Lagrangianin kerroin optimointiongelmaan 2 kirjoitetaan muodossa

$$\begin{aligned} L(\xi_1, ..., \xi_N, \eta_1, ..., \eta_M) &= \sum_{n=1}^N p_n U(\xi_n) - \sum_{m=1}^M \eta_m \left(\sum_{n=1}^N q_n^m \xi_n - x \right) \\ &= \sum_{n=1}^N p_n \left(U(\xi_n) - \sum_{m=1}^M \frac{\eta_m q_n^m}{p_n} \xi_n \right) + x \sum_{m=1}^M \eta_m. \end{aligned} \tag{72}$$

Yllä olevassa yhtälössä esiintyvä $x \in D$ tarkoittaa alkupääomaa bondeissa, mikä on kiinnitetty. Muuttujat ξ_n saavat arvonsa joukossa $\mathbb{R}$ ja muuttujat $\eta_m \in \mathbb{R}_+$.

Tavoitteena on löytää kertoimen L satulapiste $(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N, \hat{\eta}_1, ..., \hat{\eta}_M)$, joka antaa optimoijan $\hat{\varphi}_T^0$ alkiosta $x + \hat{\varphi}_T^0(\omega_n) := \hat{\xi}_n$. Lisäksi satulapisteestä saadaan myös duaalioptimoija $\hat{Q}$ alkiosta $y\hat{Q} = \sum_{m=1}^M \hat{\eta}_m Q^m$, missä $y = \sum_{m=1}^M \hat{\eta}_m$ siten, että $\hat{Q} \in \mathcal{M}^\lambda$.

Tarkastellaan arvoja $\max_\xi \min_\eta L(\xi, \eta)$ ja $\min_\eta \max_\xi L(\xi, \eta)$. Määritellään

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_1, ..., \xi_N) &= \inf_{\eta_1, ..., \eta_M} L(\xi_1, ..., \xi_N, \eta_1, ..., \eta_M) \\ &= \inf_{y>0, Q \in M^\lambda} \left\{ \sum_{n=1}^N p_n \left(U(\xi_n) - y \frac{q_n}{p_n} \xi_n \right) + yx \right\} \end{aligned} \tag{73}$$

Eli yhteys termien $(\eta_1, ..., \eta_M)$ ja $y > 0$, sekä $(\eta_1, ..., \eta_M)$ ja $Q \in \mathcal{M}^\lambda$ välille saadaan alkioilla $y = \sum_{m=1}^M \eta_m$ ja $Q = \sum_{m=1}^M \frac{\eta_m}{y} Q^m$, lisäksi merkinnällä q_n merkitään painoja $q_n = Q[\omega_n]$.

Huomataan, että $\Phi(\xi_1, ..., \xi_N)$ on yhtäpitävä optimointiongelman (65) funktionaalin kanssa, jos $(\xi_1, ..., \xi_N)$ on kelvollinen, eli toteuttaa kohdan (66) jälkimmäisen yhtälön $E_Q[\varphi^0] \le x$, kun $Q \in \mathcal{M}^\lambda$ ja saa arvon $-\infty$ muualla. Nyt samaistetaan alkiot $\varphi^0 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vektorin $(\xi_1, ..., \xi_N)$ kanssa ja nyt kohta (73) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Phi(\varphi^0) = \begin{cases} E[U(\varphi^0)], & \text{jos } E_Q[\varphi^0] \le x \text{ kaikilla } Q \in \mathcal{M}^\lambda \\ -\infty & \text{muulloin.} \end{cases} \tag{74}$$

Tarkastellaan minmaxin tapaus nyt edeltävillä merkinnoillä $y = \sum_{m=1}^M \eta_m$ ja $Q =$

$\sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m}{y} Q^m$. Määritellään

$$\begin{aligned}\Psi(y,Q) &= \sup_{\xi_1,...,\xi_M} L(\xi_1,...,\xi_N,y,Q) \\ &= \sup_{\xi_1,...,\xi_N} \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \right) + xy \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n \sup_{\xi_n} \left(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \right) + xy\end{aligned} \tag{75}$$

Nyt viimeisimmässä yhtälössä oleva supremum-termi voidaan korvata kohdassa (67) määritellyllä konjugaattifunktiolla V, missä lähtöjoukkona on $(y\frac{q_n}{p_n})$ ja saadaan sievennettyä yhtälö muotoon

$$\begin{aligned}\Psi(y,Q) &= \sum_{n=1}^{N} p_n V(y\frac{q_n}{p_n}) + xy \\ &= E_P\left[V(y\frac{dQ}{dP})\right] + xy.\end{aligned} \tag{76}$$

Määrittelemällä

$$\Psi(y) = \inf_{Q\in\mathcal{M}^\lambda} \Psi(y,Q), \tag{77}$$

voidaan päätellä joukon $\mathcal{M}^\lambda$ kompaktiudesta, kun $y > 0$, että on olemassa minimoija $\hat{Q}(y)$ yllä olevassa yhtälössä (77). Funktion V aidosta konveksiudesta voidaan päätellä, että $\hat{Q}(y)$ on yksikäsitteinen ja $\hat{Q}(y)[\omega] > 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$.

Minimoidaan $y \mapsto \Psi(y)$, jotta löydetään optimoija $\hat{y} = \hat{y}(x)$. Tämä saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\Psi'(\hat{y}) = 0. \tag{78}$$

Huomataan, että jos pudotetaan funktiosta $\Psi(y)$ pois termi xy, niin se on teoreemassa määritelty funktio $v(y)$

$$v(y) = \inf_{Q\in\mathcal{M}^\lambda} E_P\left[V(y\frac{dQ}{dP})\right]. \tag{79}$$

Tällöin kohdasta (78) voidaan päätellä, että

$$v'(\hat{y}(x)) = -x. \tag{80}$$

Optimoijan $\hat{y}(x)$ yksikäsitteisyys seuraa muuttujan v aidosta konveksiudesta, mikä taas on seuraus funktion V aidosta konveksiudesta.

Tarkastellaan taas Lagrangen funktiota $L(\xi_1,...,\xi_N,y,Q)$. Kiinnitetään edellä saatu uniikki optimoija $\hat{y}(x)$. Tällöin on olemassa piste $(\hat{\xi}_1,...,\hat{\xi}_N)$, jossa konkaavi funktio

$$(\xi_1,...,\xi_N) \to L(\xi_1,...,\xi_N,\hat{y}(x)) \tag{81}$$

saa uniikin maksiminsa. Ensimmäisen asteen ehdot

$$\frac{\delta}{\delta\xi_n} L(\xi_1,...,\xi_N,y,Q)|_{\hat{\xi}_1,...\hat{\xi}_N,\hat{y},\hat{Q}} = 0 \tag{82}$$

satulapisteelle tuottavat seuraavat yhtälöt optimoijille $\hat{\xi}_1, ...\hat{\xi}_N$:

$$U'(\hat{\xi_n}) = \hat{y}\frac{\hat{q}_n}{p_n}, \text{ tai toisin sanoin } \hat{\xi}_n = I\left(\hat{y}\frac{\hat{q}_n}{p_n}\right), \tag{83}$$

missä $\hat{y} = \hat{y}(x)$ ja $\hat{Q} = \hat{Q}(\hat{y}(x))$. Ratkaisujen $(\hat{\xi}_1, ...\hat{\xi}_N)$ yksikäsitteisyys seuraa valitun utiliteettifunktion aidosta konkaaviudesta ja siitä, että se on differentioituva kaikkialla.

Nyt yhdistämällä edelliset kohdat on löydetty Langrangen funktion L uniikki satulapiste $(\hat{\xi}_1, ...\hat{\xi}_N, \hat{y}, \hat{Q})$. Merkitsemällä $\hat{L} = \hat{L}(x)$ arvoa

$$\hat{L} = L(\hat{\xi}_1, ...\hat{\xi}_N, \hat{y}, \hat{Q}), \tag{84}$$

voidaan päätellä funktion L konkaaviudesta muuttujien $\xi_1, ...\xi_N$ suhteen ja konveksiudesta muuttujien y ja Q suhteen, että

$$\max_{\xi} \min_{y,Q} L = \min_{y,Q} \max_{\xi} L = \hat{L}. \tag{85}$$

Kohdasta (74) seuraa, että $\hat{L}$ on optimiarvo optimointiongelmille (kohdat (65) ja (66)) eli

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n) = \hat{L}. \tag{86}$$

Jälkimmäinen yhtälö kohdassa 85 tuottaa

$$\hat{L} = \Psi(\hat{y}) = v(\hat{y}) + x\hat{y}. \tag{87}$$

Nyt aikaisemmin saadusta relaatiosta $v'(\hat{y}(x)) = -x$ voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$u'(x) = \hat{y}(x), \quad x \in D. \tag{88}$$

Tieto, että u ja v ovat konjugaatteja saadaan yhtälöistä (86) ja (87):

$$\inf_{y>0}(v(y) + xy) = v(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x) = u(x). \tag{89}$$

Tieto, että funktio $u(x)$ säilyttää utliteettifunktion toteuttamat omaisuudet sileydestä, konkaaviudesta, kasvavuudesta ja Inada ehdoista saadaan, kun huomataan, että

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n) \tag{90}$$

on funktion U konveksi kombinaatio, missä skalaarit p_n on epänegatiivisia kaikilla n, siten $u(x)$ säilyttää teoreeman kohdassa 1 vaadittavat ominaisuudet.

Nyt on osoitettu teoreeman ensimmäinen kohta. Kohta 2. seuraa kohdasta (83) sekä yllä saadusta satulapisteen $(\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_N, \hat{y}, \hat{Q})$ olemassaolosta ja yksikäsitteisyydesta.

Tarkastellaan vielä viimeisenä teoreeman kohta 3. Kaava derivaatalle $v'(y)$ saadaan differentioimalla relaatiota

$$v(y) = E_P \left[V \left(y \frac{d\hat{Q}}{dP} \right) \right] = \sum_{n=1}^{N} p_n V \left(y \frac{\hat{q}_n(y)}{p_n} \right), \tag{91}$$

eli

$$\begin{aligned} v'(y) &= \frac{\partial}{\partial y} E_P \left[V \left(y \frac{d\hat{Q}}{dP} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n V' \left(y \frac{\hat{q}_n}{p_n} \right) \frac{\hat{q}_n}{p_n} + y \sum_{n=1}^{N} p_n V' \left(y \frac{\hat{q}_n}{p_n} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\hat{q}_n}{p_n} \\ &= E_{\hat{Q}} \left[V' \left(y \frac{d\hat{Q}}{dP} \right) \right] + y E_P \left[V' \left(y \frac{d\hat{Q}}{dP} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\hat{Q}}{dP} \right]. \end{aligned} \tag{92}$$

Edellisessä yhtälössä jälkimmäinen odotusarvo on nolla ja yhtälö saadaan vaadittuun muotoon

$$E_{\hat{Q}} \left[V' \left(y \frac{d\hat{Q}}{dP} \right) \right]. \tag{93}$$

Huom! Tieto, että jälkimmäinen odotusarvo on nolla ei ole selvä. Delbaen ja Schchermayerin teoksessa [2] esiintyvässä todistuksessa viitataan, että yhtälö menee vastaavasti kuin kitkattomassa tapauksessa, jossa mitta $\hat{Q}$ on kiinteä. Kitkallisen markkinan tapauksessa tilanne ei kuitenkaan ole sama ja samoja johtopäätöksiä ei voida tehdä. Tässä työssä tätä ei lähdetä avaamaan sen enempää ja vedotaan lähdemateriaaliin, jonka mukaan saadaan johdettua vaaditun muotoinen yhtälö.

Kun derivoidaan kohtaa (90), niin kaava u' :lle muovautuu muotoon

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n U'(\hat{\xi}_n) \frac{\partial}{\partial x} \hat{\xi}_n \\ &= E_P \left[U'(x + \hat{\varphi}_T^0) \right] \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x + \hat{\varphi}_T^0)}_{=1} \\ &= E_P \left[U'(x + \hat{\varphi}_T^0) \right] \end{aligned} \tag{94}$$

Kohtaa (92) käyttämällä saadaan vaadittu muoto $yv'(y)$:lle

$$\begin{aligned} yv'(y) &= yE_{\hat{Q}}\left[V'\left(y\frac{d\hat{Q}}{dP}\right)\right] \\ &= y\sum_{n=1}^{N}\hat{q}_nV'\left(y\frac{\hat{q_n}}{p_n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}p_ny\frac{\hat{q}_n}{p_n}V'\left(y\frac{\hat{q_n}}{p_n}\right) \\ &= E_P\left[y\frac{d\hat{Q}}{dP}V'\left(y\frac{d\hat{Q}}{dP}\right)\right]. \end{aligned} \tag{95}$$

Viimeisenä vielä $xu'(x)$ saadaan käyttämällä kohtaa (92) ja teoreeman kohtaa 2

$$\begin{aligned} xu'(x) &= -v(\hat{y})u'(x) \\ &= -v(\hat{y})y \\ &= yE_{\hat{Q}}\left[V'\left(y\frac{d\hat{Q}}{dP}\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N}\hat{q}_ny\left(-V'(\hat{y}\frac{q_n}{p_n})\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}p_ny\frac{\hat{q}_n}{p_n}\left(-V'(\hat{y}\frac{q_n}{p_n})\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}p_nU'(x+\hat{\varphi}_T^0)(x+\hat{\varphi}_T^0) \\ &= E_P\left[(x+\hat{\varphi}_T^0)U'(x+\hat{\varphi}_T^0)\right]. \end{aligned} \tag{96}$$

Todistus on nyt saatettu päätökseen.

□

Yllä olevassa todistuksessa ei sovellettu abstraktia minmaxteoriaa Lagrangianin satulapisteen olemassa olon varmistamiseksi. Käytettiin valistunutta arvausta sen löytämiseksi, differentioitiin ja tarkasteltiin derivaatan nollakohtia. Teoreeman oletukset on valittu siten, että varmasti löydetään kyseisellä metodilla yksikäsitteinen vastaus.

Nyt voidaan teoreeman ja portfolion konstruoimisen havainnollistamiseksi tarkastella käytännössä kappaleen asetelmaa. Jos oletetaan, että on olemassa jokin osake S ja toimija käy kauppaa sillä ja bondeilla jollain diskreetillä aikavälillä $0, ..., T$, niin miten voitaisiin simuloida tätä asetelmaa ja kappaleen optimointiongelmia. Miten ensinnäkään voidaan rakentaa kaikki tarvittavat oletukset osakeprosessista S ja portfolioista ohjelmointikielellä ja miten optimaaliset sijoitusstrategiat rakennetaan. Käydään seuraavassa kappaleessa pari esimerkkitapausta, jotka on rakennettu R-ohjelmointikielellä ja Rstudio ohjelmistolla.

5 Simulaatioita utiliteetin maksimoinnille

Tarkastellaan nyt edellisen kappaleen teoriaa käytännössä. Toteutetaan kaksi simulaatiota, joissa pohditaan ja tarkastellaan miten toimijan kannattaa valita sijoitusstrategiansa eri skenaarioissa, jotta tämä saa utiliteettinsa maksimoitua. Ensimmäisessä simulaatiossa määritellään erittäin yksinkertainen osakkeen hinnoitteluprosessi S, jotta saadaan ensin hyvä kuva siitä, mitä tehdään ja minkälaisia tuloksia halutaan. Yritetään toisessa simulaatiossa tehdä pieniä muutoksia oletuksiin ensimmäisessä simulaatiossa tehtyjen havaintojen perusteella. Muutosten tavoitteena on, että toimijan kaupankäynti alkaisi muistuttamaan enemmän oikeaa kaupankäyntiä, jossa toimija tekee muutoksia positioihinsa osakkeissa ja bondeissa riippuen markkinoiden tilasta. Simulaatioissa esiintyvät R-koodit on mahdollista kopioida ja ajaa esimerkiksi Rstudio ohjelmistolla, eli simulaatiot ja tulokset voi halutessaan toistaa.

5.1 Yksinkertainen long-positio simulaatio

Valitaan tarkastelun aikaväliksi päivät $1, ..., 100$ ja oletetaan, että osake saa aina yhden hinnan per päivä. Esimerkiksi päivänä 1 osakkeen hinta on 20 bondia ja sinä päivänä toimija saa halutessaan ostaa ja myydä osakkeita tähän hintaan. Seuraavana päivänä hinta taas saattaa olla 19,5 bondia ja kauppaa käydään taas sillä hinnalla. Määritellään simulaation parametrit:

```
#Alustetaan simulaation parametrit:
  nOfDays <- 100
  nOfSimulations <- 12
  startingPriceOfStockS <- 20
  startingWealth <- 110
  terminalWealth <- 0
  utilityOfActor <- 0
  transactionCosts <- 0.01
#Alustetaan matriisit, joista toiseen tallennetaan jokaisen simulaation osakkeiden kulku
    ja toiseen tallennetaan aina kunkin simulaation toimijan portfolioposition:
  matrixOfSimulations <- matrix(0, nrow=nOfSimulations, ncol=nOfDays)
  portfolioOfActor <- matrix(0, nrow=2, ncol=nOfDays)
  portfolioOfActor[1,1] <- startingWealth
```

Määritellään funktiot *buyStock*() ja *sellStock*(), joilla toimija voi myydä ja ostaa osakkeita. Osakkeiden ostamisessa on rajoitettu, että toimija ei pysty ostamaan osakkeita yli varallisuutensa. On huomionarvoista mainita, että funktio buyStock() on määritelty siten, että toimija voi ostaa vain kokonaisia kappaleita osaketta. Tästä johtuen toimijan kannattaa 'yrittää' ostaa osaketta jokaisella ajanhetkellä. Esimerkissä toimijalla on aloitusvarallisuutta 110 yksikköä velkakirjaa ja osakkeen lähtöhinta aloitusajanhetkellä on 20 bondia. Täten toimijalle jää 10 kappaletta bondia yli aloitushetken transaktiosta, missä hän ostaa 5 osaketta. Nyt jos osakkeen hinta laskee 10 bondiin tai alle jollain kaupankäyntiajanhetkellä, niin toimijan kannattaa oletuksiinsa nojautuen ostaa kuudes yksikkö velkakirjaa. Funktiossa sellStock esiintyy luku transactionCosts, mikä viittaa simulaation transaktiokuluihin 1% ja siihen, että osaketta myydessä toimija maksaa transaktiosta kuluja. Osaketta myydessä on mahdollistettu tapaus, että osaketta voidaan myydä sitä omistamatta (lyhyeksi myynti), eli osakkeiden lukumäärä saa toimijan salkussa olla negatiivinen.

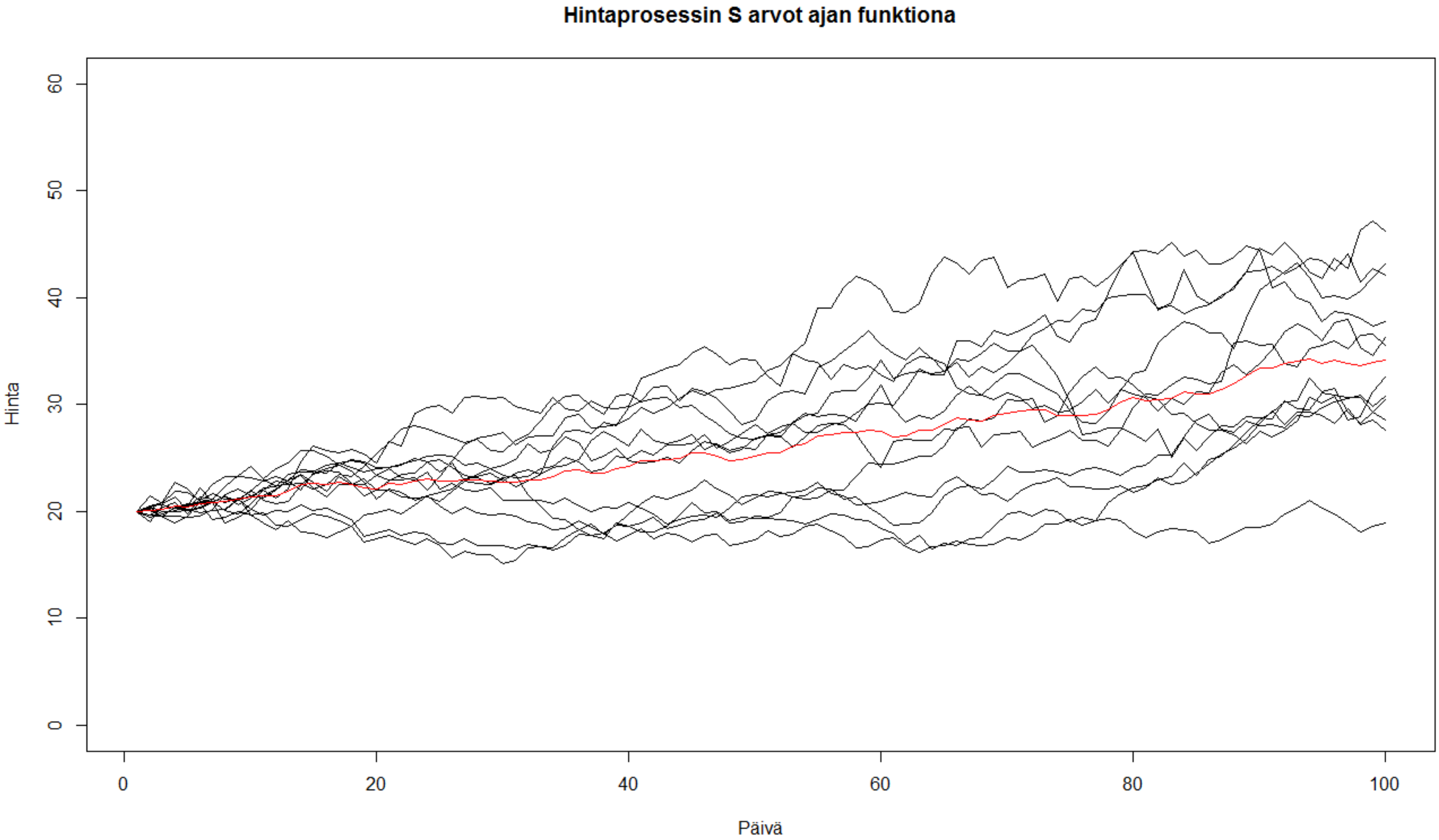
```
buyStock <- function(date, nOfSimulation, currentPositionInBonds, currentPositionInStocks,
    nOfStocksToBuy){
   priceOfStock <- matrixOfSimulations[nOfSimulation,date]
   positionInBondsAfterTrade <- currentPositionInBonds-nOfStocksToBuy*priceOfStock
   positionInStocksAfterTrade <- currentPositionInStocks+nOfStocksToBuy
   if (positionInBondsAfterTrade < 0){
      return(c(currentPositionInBonds, currentPositionInStocks))
   }
   return(c(positionInBondsAfterTrade, positionInStocksAfterTrade))
 }

sellStock <- function(date, nOfSimulation, currentPositionInBonds, currentPositionInStocks
   , nOfStocksToSell){
   priceOfStock <- matrixOfSimulations[nOfSimulation,date]
   positionInBondsAfterTrade <- currentPositionInBonds+nOfStocksToSell*priceOfStock*(1-
       transactionCosts)
   positionInStocksAfterTrade <- currentPositionInStocks-nOfStocksToSell
   return(c(positionInBondsAfterTrade, positionInStocksAfterTrade))
}
```

Määritellään nyt osakkeen S hinnoitteluprosessi. Rakennetaan se siten, että päivien väliset muutokset ovat normaalijakautuneita, jossa keskiarvona on $0,005$ ja keskihajontana on $0,035$. Nyt keskiarvo määrättiin tarkoituksella hieman positiiviseksi, jotta ensinnäkin toimijan kannattaa sijoittaa osakkeeseen siten, että transaktiokulut eivät syö kaikkea mahdollista tuottoa. Toiseksi tavoitteena on, että tässä yksinkertaisessa esimerkissä toimijan kannalta optimaaliseksi strategiaksi osoittautuisi long-positio osakkeissa, eli toimija siis ostaisi itselleen osakkeita eikä myisi niitä lyhyeksi. Piirretään tämän jälkeen kuvaaja kahdestatoista generoidusta prosessista.

```
 #Lasketaan osakkeen S kulku nOfSimulations kertaa ja tallennetaan ne yllä määriteltyyn
     matriisiin matrixOfSimulations.
 for ( i in 1:nOfSimulations){
 #Osakkeen yhden päivän hinnan muutokset ovat normaalijakautuneita, jossa keskiarvo on
     0.005 ja keskihajonta 0.035.
   dailyMovementOfStock <- rnorm(nOfDays-1,mean=0.005,sd=0.035)
   matrixOfSimulations[i,]<-cumprod(c(startingPriceOfStockS, 1+dailyMovementOfStock))
 }
 #Piirretään osakkeen S kulku eri simulaatioissa
 plot(matrixOfSimulations[1,],type='l',ylab="Hinta",xlab="Päivä",main="Osakkeen S kulku"
     , ylim=c(0,60))
 for (i in 2:nOfSimulations){
   lines(matrixOfSimulations[i,])
```

```
}
averageOfSimulations<-0
for (i in 1:nOfDays){
   averageOfSimulations[i] <- mean(matrixOfSimulations[,i])
}
lines(averageOfSimulations,col="red")
```



Kuva 1: Osakkeen S simulaatioita

Kuvassa 1 on piirretty 12 simulaatiota osakeprosessista S ja punaisella vielä niiden keskiarvo. Vaikuttaa nyt siltä, että osakkeen hinta on keskimäärin tavoitteiden mukaisesti hieman kasvava, mutta satunnaisheilahtelu mahdollistaa kuitenkin sen, että on myös tapauksia jolloin osakkeen arvo laskee. Tästä ilmenee, että osakeprosessi ei mahdollista arbitraasia.

Siirrytään sitten itse optimointiteorian pariin. Edellisen kappaleen mukaan toimijan utiliteettifunktion tulee olla kasvava ja lisäksi tavoitteena on maksimoida toimijan utiliteetti lopetusajanhetkellä, joten oikeastaanhan on riittävää maksimoida toimijan varallisuus lopetusajanhetkellä. Tästä voidaan johtaa toimijan utiliteetti kuvaamalla lopetusvarallisuutta utiliteettifunktiolla. Valitaan tässä kappaleessa toimijan käyttämäksi utilitettifunktioksi luonnollinen logaritmi $\ln(x)$.

Tässä tapauksessa, jossa osakkeen hintaprosessi on odotusarvollisesti tasaisesti kasvava, luonnollisesti toimijan on kannattavinta mennä mahdollisimman aikaisin long-positioon ja pysyä siellä lopetusajanhetkeen. Tämä johtuen siitä, että jokaisena hetkenä milloin toimija ei ole long-positiossa, niin hän odotusarvollisesti menettää sen hetken 'tasaisen kasvun'. Lisäksi toimijan kannattaa minimoida transaktioiden lukumäärä, jotta hän ei sitä kautta menetä osaa varallisuudestaan. Edellytyksenä osakkeisiin sijoittamisessa on aina se, että toimija voi odotusarvollisesti saavuttaa parempaa tuottoa transaktiokulujen vallitessa riskillisessä osakkeessa verrattuna riskittömään bondiin. Tämä edellytys täyttyy tässä esimerkissä. Rakennetaan toimijalle nyt edellä kuvatun mukainen sijoitusstrategia ja simuloidaan sitä nOfSimulations kertaa.

```
#Jokaiselle simulaatiolle j in 1:nOfSimulations
for (j in 1:nOfSimulations){
#Jokaisella kaupankäyntiajanhetkellä (jokaiselle simulaatiolle):
   for (i in 1:(nOfDays-1)){
      priceOfStockAtDatei <- matrixOfSimulations[j,i]
      #Jos toimijalla on millä tahansa ajanhetkellä varallisuutta ostaa lisää osaketta,
          niin hän tekee sen ja ostaa niin monta kappaletta kuin mahdollista
      portfolioOfActor[,i+1]<-t(buyStock(i,j,portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor[2,i
          ], floor(portfolioOfActor[1,i]/priceOfStockAtDatei)))
   }
   #Nyt (jokaisen yksittäisen simulaation) lopetusajanhetkellä nOfDays likvidoidaan
       osakepositio ja talletetaan se terminalWealth muuttujaan.
   terminalWealth[j] <- portfolioOfActor[1, nOfDays]+portfolioOfActor[2, nOfDays]*
       matrixOfSimulations[j,nOfDays]*(1-transactionCosts)
}
```

Nyt simulaation kokoa kasvattaessa voidaan tarkastella mitä lukua kohti toimijan utiliteetti suppenee, kun ollaan yllä olevan pohdinnan seurauksena päätelty, että kyseinen strategia on kyseisellä osakeprosessilla S ja utiliteettifunktiolla U toimijalle kaikkein otollisin.

```
#Lasketaan nyt toimijan utiliteettifunktion U kuvaamat arvot simuloiduille toimijan
    portfolion lopetuspositioille eri simulaatioissa.
for (i in 1:nOfSimulations){
   utilityOfActor[i] <- log(terminalWealth[i])
}
print(utilityOfActor)
print(mean(utilityOfActor))
```

Eräässä esimerkkisimulaatiossa saatiin seuraava tulos:

```
> print(utilityOfActor)
[1] 4.938569 5.506582 4.897201 4.697453 5.090560 4.956631 5.722272 5.412328 5.274660
    5.530828 4.940289 5.186427
> print(mean(utilityOfActor))
[1] 5.179483
> print(mean(terminalWealth))
[1] 185.8435
```

Eli otoskokona oli 12 ja tällöin toimijan utiliteetti sai keskiarvokseen n. 5,18 ja lopetusvarallisuudeksi tuli keskimäärin n. 185,84 bondia. Nyt jos kasvatetaan otoskokoa esimerkiksi 5000 kappaleeseen, niin tällöin utiliteetiksi tuli keskimäärin 5,093 ja lopetusvarallisuudeksi 171,89 bondia. Toimijan utiliteetin voidaan tämän perusteella sanoa olevan n. 5.09. Selvästi toimijan on kannattavaa käydä kauppaa osakkeella S, sillä näiden 5000 simulaation tuloksena toimija sai bondeilleen tuottoa keskimäärin hieman yli 60 kappaletta bondia.

5.2 Aika- ja polkuriippuvainen simulaatio

Nyt nousee kysymykseksi, että voitasiinko muuttaa simulaation oletuksia siten, että toimijan optimaaliseksi sijoitusstrategiaksi osoittautuisi toisenlainen sijoitusstrategia, mikä poikkeaisi transaktioiden näkökulmasta edeltävästä sijoitusstrategiasta, jossa mentiin mahdollisimman suuresti ja mahdollisimman aikaisin vain long-positioon. Jos käännettäisiin osakkeenhinnoitteluprosessi S toimimaan siten, että se odotusarvollisesti olisi negatiivinen, niin tällöin toimija kääntyisi vain vastaavanlaiseen positioon, mutta olisi long-position sijaan vain short-positiossa. Vaatimuksena myös tässä tapauksessa, että toimijalla on odotusarvollisesti mahdollisuus saada tuottoa transaktiokulujen vallitessa.

Jos simuloitaisiin tämänlaista tilannetta ja muuten oletukset olisivat samat kuin edellä, niin tällöin törmättäisiin tilanteeseen, jossa toimija myisi lyhyeksi äärettömän määrän osaketta ja tätä kautta odotusarvollisesti toimijan lopetusvarallisuus ja utiliteetti olisivat ääretön. Tämä tilanne ei olisi matemaattisesti eikä taloustieteellisesti järkeenkäypä, joten tämän tilanteen välttämiseksi tulee asettaa joitain rajoitteita, jolloin kyseinen tilanne ei ole enää mahdollinen. Tämän voi toteuttaa esimerkiksi asettamalla rajoitteet toiselle varallisuuskomponentille. Eli rajoitetaan, että toimijan bondien lukumäärä saa olla enintään -200 negatiivinen tai vastaavasti toimija saa myydä lyhyeksi vain 10 kappaletta osaketta. Tätä tilannetta ei kuitenkaan ole mielekästä simuloida, sillä simulaatio olisi täysin sama kuin ensimmäinen simulaatio, mutta long-positio olisi vaihtunut short-positioon.

Täten herää kysymykseksi, olisiko mahdollista rakentaa sellainen simulaatio, jossa toimijan optimi sijoitusstrategiaksi osoittautuisi sellainen, jossa hänen tulisi suorittaa transaktioita muinakin kuin aloitusajanhetkellä (tai heti kuin mahdollista) ja, että sijoitusstrategia ei olisi yksisuuntainen härkä- tai karhustrategia (ollaan kokoajan joko long- tai short-positiossa), vaan sellainen missä toimijan tulisi 'oikeasti käydä kauppaa' erinäisistä ilmiöistä johtuen. Nyt koska toimijan utiliteettifunktio on määritelty vain lopetusajanhetkelle ja se on kasvava, niin toimijaa kiinnostaa vain löytää strategia, jolla hän voi maksimoida lopetusvarallisuutensa. Utiliteettifunktio ei siis ole osakkeen hinnoitteluprosessin S polusta riippuvainen.

Vaikuttaa siis siltä, että on tehtävä muutoksia osakkeen hinnoitteluprosessiin S ja sen päivittäisiin hyppyihin, jotta saadaan mahdollisesti ulos edellä kuvattuja ominaisuuksia toimijan sijoitusstrategiaan. Edellisissä kappaleissa prosessille S tehtiin vain oletus, että sen on oltava stokastinen prosessi, joten kovin suuria rajoituksia sen määrittelyssä ei ole.

Voidaan kokeilla, mitä tapahtuu jos määritellään, että prosessi S on sekä vuodenaikariippuvainen että edeltävien päivien suunnasta riippuvainen. Määritellään siis simulaatioiden aikaväli uudestaan esimerkiksi 360 päivään ja oletetaan, että tämä koostuu neljästä 90 päivän 'vuodenajasta' ja kahdestatoista 30 päivän 'kuukaudesta'. Oletetaan, että näillä vuodenajoilla on jonkinlainen vaikutus osakkeen hinnoitteluprosessiin S, eli toisin sanoen prosessi S on riippuvainen päivämäärästä. Määritellään, että

1. Tammikuu ja helmikuu (talvi) 60 päivää - Karhu
2. Maaliskuu, huhtikuu ja toukokuu (kevät) 90 päivää - Härkä
3. Kesäkuu, Heinäkuu ja Elokuu (kesä) 90 päivää - Härkä
4. Syyskuu, Lokakuu ja Marraskuu (syksy) - Karhu
5. Joulukuu (talvi) 30 päivää - Karhu

Tehtiin siis karkea jaottelu, kun ulkona on valoisaa ja luonto vihertyy, niin prosessi S kirii odotusarvollisesti ylöspäin (Härkä/Bull). Kun ulkona hämärtyy ja säät huononevat syksyllä ja talvella, niin prosessilla on käänteinen, alaspäin suuntainen trendi (Karhu/-Bear). Nyt voitaisiin veikata, että toimijan kannattaa optimistrategian saavuttamiseksi olla long-positiossa osakkeessa kevät- sekä kesäaikoina ja short-positiossa talvella ja syksyllä.

Lisätään tarkasteluun vielä kaksi osakkeen S historiadataan perustuvaa elementtiä. Jos osakkeella on ollut 3 tai 4 positiivista (vastaavasti negatiivista) päivää, niin oletetaan, että hinnoitteluprosessin S valtaa euforia (vastaavasti dysforia) ja todennäköisyys, että kyseisen päivän liikerata on positiivinen (negatiivinen) on suurempi kuin yleensä. Otetaan mukaan tähän vielä myös tätä elementtia hieman negatoiva ominaisuus: jos osakkeella on ollut 5 tai useampi positiivista (negatiivista) päivää, niin tällöin jotkin tekniset indikaattorit paukkuvat ja on lähes varmaa, että osakkeen hintaprosessi S korjaa euforiaa ja maniaa vastaan. Euforiassa S korjaa alaspäin ja dysforiassa ylöspäin. Nimetään tätä polkuriippuvaista kokonaisuutta tekniseksi poikkeavuudeksi.

Tiedostetaan tässä välissä, että kyseisillä ominaisuuksilla vuodenaikoihin ja 'teknisiin poikkeavuuksiin' liittyen ei ole mitään tekemistä reaalimaailman ja oikeilla markkinoilla olevien osakkeiden kanssa. Lisäksi tieto, että osakkeenhinnoitteluprosessin päivittäiset hypyt olisivat kappaleen tapaisesti normaalijakautuneita on myös reaalimaailman tilanteessa puppua. Toimijahan ei voisi myöskään tietää, millä tavalla osakeprosessin päivittäiset hypyt ovat jakautuneet. Nämä työssä tehdyt simulaatiot näiltä osin hyvin kaukana todellisuudesta.

Oikeasti markkinat ovat kompleksi verkko sääntöjä, tapahtumia, käyttäytymistiedettä, politiikkaa, ilmiöitä, korrelaatioita, twiittejä, algoritmeja jne. jotka vaikuttavat ja liittyvät toisiinsa sekä riippuvat toisistansa. Lisäksi kaikki nämä ilmiöt ja niiden vaikutukset elävät ja siten myös muuttuvat ajan mittaan. Ne ilmiöt joilla oli merkitystä 20 vuotta sitten markkinoiden käyttäytymiseen eivät välttämättä päde enää nykypäivänä. Näiden asioiden ennustaminen kattavasti käytännössä on mahdotonta ja varsinkin tämän työn kaltaisessa tarkastelussa, jossa halutaan esittää käytännössä jokin pieni osa teoriaa, pienessä osassa markkinaa on myöskin mahdotonta ja lisäksi tarpeetonta. Siksi on riittävää markkinoiden näkökulmasta mallintaa jotain, mikä lievästi voi muistuttaa markkinoiden liikettä ja rikastaa tätä mallinusta vielä jollain ilmiöillä, jotta saadaan osoitettua minkälaiset asiat teorian soveltuvuuteen voivat vaikuttaa. Lisäksi on hyödyllistä luettavuuden näkökulmasta pukea nämä asiat siten, että ne ovat helppoja sisäistää. Tässä tapauksessa haluttiin siis markkinoille sellaisia ilmiöitä, että toimija oikeasti 'joutuu' käymään kauppaa satunnaisilla aikahetkillä määritellyllä aikavälillä.

Nyt toisen simulaation toteuttamiseksi täytyy ensinnäkin muokata sellStock() funktiota, jotta toimija ei voi mennä aikaisemmin kuvatusti 'äärettömästi' short-positioon. Toiseksi osakkeen hinnoitteluprosessia S tulee muokata siten, että se toteuttaa edeltävät määritelmät vuodenaikariippuvuudesta ja edeltävien päivien polkuriippuvuudesta. Alustetaan simulaation parametrit:

```
#Alustetaan simulaation parametrit:
nOfDays <- 360
nOfSimulations <- 12
startingPriceOfStockS <- 20
startingWealth <- 110
terminalWealth <- 0
utilityOfActor <- 0
transactionCosts <- 0.01
#Alustetaan matriisit, joista toiseen tallennetaan jokaisen simulaation osakkeiden kulku
    ja toiseen tallennetaan aina kunkin simulaation toimijan portfoliopositio:
matrixOfSimulations <- matrix(0, nrow=nOfSimulations, ncol=nOfDays)
portfolioOfActor <- matrix(0, nrow=2, ncol=nOfDays) #Tämä on vain apumuuttujana.
portfolioOfActor[1,1] <- startingWealth
dailyMovementOfStock<-matrix(0, nrow=1, ncol=nOfDays)
```

Uudelleen määritellään sellStock() funktio:

```
sellStock <- function(date, nOfSimulation, currentPositionInBonds, currentPositionInStocks
    , nOfStocksToSell){
  priceOfStock <- matrixOfSimulations[nOfSimulation,date]
  if (nOfStocksToSell > currentPositionInStocks+10){
    nOfStocksToSell<- currentPositionInStocks+10
  }
  positionInBondsAfterTrade <- currentPositionInBonds+nOfStocksToSell*priceOfStock*(1-
      transactionCosts)
  positionInStocksAfterTrade <- currentPositionInStocks-nOfStocksToSell
  return(c(positionInBondsAfterTrade, positionInStocksAfterTrade))
```

```
}
```

Nyt on määritelty siten, että toimija saa shortata osaketta siten, että osakepositio on korkeintaan 10 kappaletta negatiivinen.

Määritellään funktio simulatePriceOfStock()-funktio ja apufunktiot isTechinalAnomaly() ja movementIfTechnicalAnomaly(), jolla voidaan mallintaa osakkeen hintaa aikavälillä $[1, nOfDays]$. Nyt määritellään hintaprosessi siten, että

1. Talvisin osakkeella S on trendi alaspäin keskiarvolla -0,025 ja keskihajonnalla 0,035
2. Keväisin osakkeella S on trendi alaspäin keskiarvolla 0,015 ja keskihajonnalla 0,035
3. Kesäisin osakkeella S on trendi alaspäin keskiarvolla 0,025 ja keskihajonnalla 0,035
4. Syksyisin osakkeella S on trendi alaspäin keskiarvolla -0,015 ja keskihajonnalla 0,035

Lisäksi jos osakeprosessille sattunut tekninen poikkeavuus on 3-4 päivää, niin korjaus on normaalijakautunut keskiarvolla 0,02 ja keskihajonnalla 0,025. Korjaus on tässä tapauksessa aina edeltävien päivien trendin suuntainen (esim. 3 positiivista päivää, tällöin mean=0,025, sd=0,025. Jos poikkeavuus on 3 negatiivista päivää, niin tällöin mean=-0,025, sd=0,025). Jos tekninen poikkeavuus taas on kestänyt 5 päivää tai yli, niin korjaus on normaalijakautunut keskiarvolla 0,03 ja keskihajonnalla 0,035. Tässä tapauksessa korjaus on trendiä vastaan käänteinen, eli 5 positiivista päivää, tällöin keskiarvolla -0,03 ja keskihajonnalla 0,035.

```
simulatePriceOfStock <- function(){
  dailyMovementOfStock<-0
  for (i in 1:(nOfDays-1)){
      ######TALVI#########
      if (i <= 59){
        dailyMovementOfStock[i] <- rnorm(1,mean=-0.025,sd=0.035)
      }
      ######KEVÄT#########
      if ((i>59) & (149)){
        dailyMovementOfStock[i] <- rnorm(1,mean=0.015,sd=0.035)
      }
      ######KESÄ#########
      if ((i>149) & (i<= 239)){
        dailyMovementOfStock[i] <- rnorm(1,mean=0.025,sd=0.035)
      }
      ######SYKSY#########
      if ((i>239) & (i<= 329)){
        dailyMovementOfStock[i] <- rnorm(1,mean=-0.015,sd=0.035)
      }
      ######TALVI#########
      if ((i>329) & (i<= 359)){
        dailyMovementOfStock[i] <- rnorm(1,mean=-0.025,sd=0.035)
```

```
      }
    }
    return(dailyMovementOfStock)
  }
```

```
#Haetaan tieto, että onko kyseessä jonkinlainen tekninen poikkeavuus:
#1. jos 5 edeltävää päivää on ollut negatiivista, niin palautetaan TOSI (eli on tekninen
    poikkeavuus) ja -5
#2. jos 5 edeltävää päivää on ollut positiivista, niin palautetaan TOSI ja 5
#3. jos 3 edeltävää päivää on ollut negatiivista, niin palautetaan TOSI ja -3
#4. jos 3 edeltävää päivää on ollut positiivista, niin palautetaan TOSI ja 3
isTechnicalAnomaly <- function(vectorOfMovements, date){
  dailyMovementOfStock <- vectorOfMovements
  if (length(dailyMovementOfStock[date-5])==1){
    if ((dailyMovementOfStock[date-1]<0) & (dailyMovementOfStock[date-2]<0) & (
        dailyMovementOfStock[date-3]<0)& (dailyMovementOfStock[date-4]<0)& (
        dailyMovementOfStock[date-5]<0)){
      return(c(TRUE, -5))
    }
    if ((dailyMovementOfStock[date-1]>0) & (dailyMovementOfStock[date-2]>0) & (
        dailyMovementOfStock[date-3]>0)& (dailyMovementOfStock[date-4]>0)& (
        dailyMovementOfStock[date-5]>0)){
      return(c(TRUE, 5))
    }
  }
  if (length(dailyMovementOfStock[date-3])==1){
    if ((dailyMovementOfStock[date-1]<0) & (dailyMovementOfStock[date-2]<0) & (
        dailyMovementOfStock[date-3]<0)){
      return(c(TRUE, -3))
    }
    if ((dailyMovementOfStock[date-1]>0) & (dailyMovementOfStock[date-2]>0) & (
        dailyMovementOfStock[date-3]>0)){
      return(c(TRUE, 3))
    }
  }
  return(FALSE)
}

#Määritellään jakaumat teknisen poikkeavuuden ilmetessä:
movementOfStockIfTechinalAnomaly <- function(typeOfAnomaly){
  if (typeOfAnomaly == -5){
    return(rnorm(1,mean=0.03,sd=0.035))
  }
  if (typeOfAnomaly == 5){
    return(rnorm(1,mean=-0.03,sd=0.035))
  }
  if (typeOfAnomaly == -3){
    return(rnorm(1,mean=-0.02,sd=0.025))
```

```
    }
    if (typeOfAnomaly == 3){
        return(rnorm(1,mean=0.02,sd=0.025))
    }
    print("Error in function movementOfStockIfTechnicalAnomaly(). Invalid input
        typeOfAnomaly")
    return(FALSE)
}
```

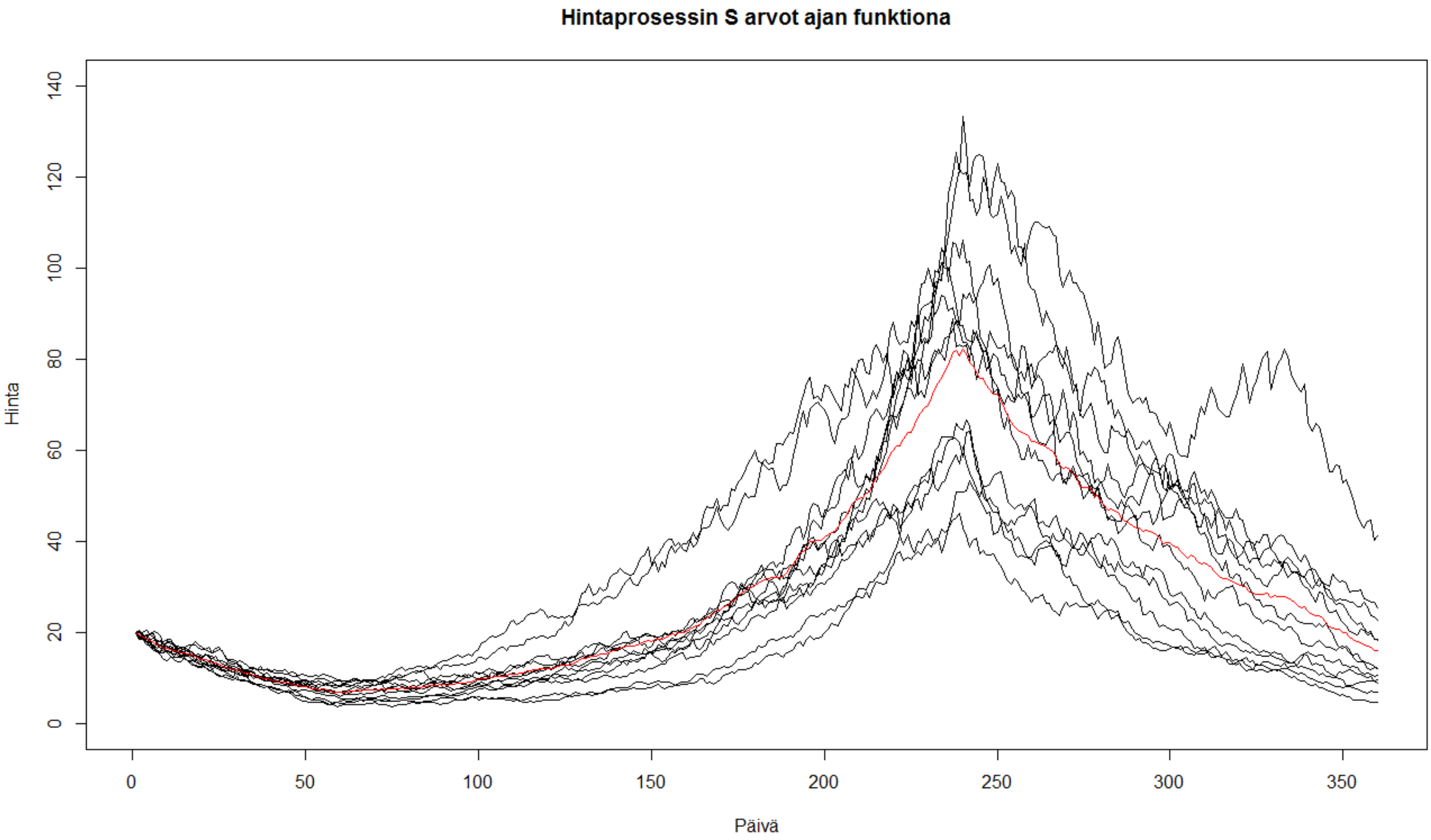
Määritellään vielä viimeisenä funktio actInTechnicalAnomaly(), jota kutsutaan kun edellisinä päivinä on tapahtunut tekninen poikkeavuus. Funktio suorittaa transaktion oikein jokaisessa mahdollisessa poikkeavuudessa.

```
#Määritellään
actInTechnicalAnomaly <- function(typeOfAnomaly, date, nOfSimulation,
    currentPositionInBonds, currentPositionInStocks){
    priceOfStockAtDatei <- matrixOfSimulations[j,i]
    if (typeOfAnomaly == -5){
        return(t(buyStock(date, nOfSimulation, currentPositionInBonds,
            currentPositionInStocks, floor(currentPositionInBonds/priceOfStockAtDatei))))
    }
    if (typeOfAnomaly == 5){
        return(t(sellStock(date, nOfSimulation, currentPositionInBonds,
            currentPositionInStocks, currentPositionInStocks+10)))
    }
    if (typeOfAnomaly == -3){
        return(t(sellStock(date, nOfSimulation, currentPositionInBonds,
            currentPositionInStocks, currentPositionInStocks+10)))
    }
    if (typeOfAnomaly == 3){
        return(t(buyStock(date, nOfSimulation, currentPositionInBonds,
            currentPositionInStocks, floor(currentPositionInBonds/priceOfStockAtDatei))))
    }
    print("Error in function actInTechnicalAnomaly(). Invalid input typeOfAnomaly")
    return(FALSE)
}
```

Nyt voidaan simuloida osakeprosessin S kulkua ja piirtää kuva minkälaisia polkuja prosessi S piirtää.

```
#Lasketaan osakkeen S kulku nOfSimulations kertaa ja tallennetaan ne yllä määriteltyyn
    matriisiin matrixOfSimulations.
for (j in 1:nOfSimulations){
    vector1<-simulatePriceOfStock()
    for (i in 1:(nOfDays-1)){
        if (isTechnicalAnomaly(vector1,i)[1]==1){
            vector1[i] <- movementOfStockIfTechinalAnomaly(isTechnicalAnomaly(vector1,i)[2])
        }
    }
```

```
   movementOfStock[j,] <- vector1
   matrixOfSimulations[j,]<-cumprod(c(startingPriceOfStockS,1+vector1))
}
plot(matrixOfSimulations[1,],type='l',ylab="Hinta",xlab="Päivä",main="Osakkeen S kulku",
    ylim=c(0,140))
for (i in 2:nOfSimulations){
   lines(matrixOfSimulations[i,])
}
#Muodostetaan vektori, joka koostuu kaikkien simulaatioiden päivien keskiarvoista.
averageOfSimulations<-0
for (i in 1:nOfDays){
   averageOfSimulations[i] <- mean(matrixOfSimulations[,i])
}
lines(averageOfSimulations,col="red")
```



Kuva 2: Osakkeen S simulaatioita

Kuvassa 2 on simuloitu 12 kertaa S kulkua ja punaisella on niiden keskiarvo.

Näyttää nyt siltä, että osakkeen hinnoitteluprosessi sisältää määrittelyjen mukaisesti 5 toisistaan erottuvaa trendiä. Päivinä 1-60 vallitsee jyrkempi laskeva trendi, jonka jälkeen prosessi lähtee maltilliseen kasvuun ja päivinä 151-240 tämä kasvu on jyrkkää. Tämän jälkeen syksyllä päivinä 241-330 maltillisesti laskevaa, jonka jälkeen lasku on taas jyrkempää viimeiset 30 päivää talvella. Kutsutaan näitä trendejä vuodenaikatrendeiksi: talvitrendi, kevättrendi, kesätrendi ja syystrendi.

On ilmeistä, että toimijan kannattaa olla all-in tyyppisesti shorttina syys- ja talvitrendeinä sekä longina kevät- ja kesätrendeinä. Kysymykseksi jää, kannattaako toimijan teknisten poikkeavuuksien ilmetessä vaihtaa strategiaansa, jos ne ovat vuodenaikatrendiä vastaan asettuvia poikkeavuuksia. Jos tarkastellaan jälleen tapausta, jossa transaktiokulut on 1 prosentti toimijan myymästä osakepotista, niin sekä 3-4 päivän ja yli 5 päivän tekniset poikkeavuudet ovat odotusarvollisesti suuremmat (0,02 ja 0,03) kuin transaktio kulut ja siten voidaan päätellä, että toimijan kannattaa muuttaa positiotaan.

Rakennetaan siten toimijalle strategia, joka valitsee vuodenaikatrendikseen vuodenajasta riippuen long- ja short-position ja lisätään siihen päälle toiminnallisuus, jolloin toimija ottaa huomioon vielä nämä tekniset poikkeavuudetkin. Simuloidaan tätä sen jälkeen nOfSimulations kertaa ja lasketaan toimijan utiliteetti ja lopetusvarallisuus simulaatiossa.

```
for (j in 1:nOfSimulations){
   for (i in 1:(nOfDays-1)){
      priceOfStockAtDatei <- matrixOfSimulations[j,i]
      if (isTechnicalAnomaly(movementOfStock[j,],i)[1]==1){
         portfolioOfActor[,i+1] <- actInTechnicalAnomaly(isTechnicalAnomaly(movementOfStock
             [j,],i)[2], i,j,portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor[2,i])
      } else {
         if (i <= 60){
            portfolioOfActor[,i+1] <- sellStock(i,j, portfolioOfActor[1,i],
                portfolioOfActor[2,i], portfolioOfActor[2,i]+10)
         }
         if ((i > 60) & (i<=150)){
            portfolioOfActor[,i+1] <- buyStock(i,j, portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor
                [2,i], floor(portfolioOfActor[1,i]/priceOfStockAtDatei))
         }
         if ((i > 150) & (i<=240)){
            portfolioOfActor[,i+1] <- buyStock(i,j, portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor
                [2,i], floor(portfolioOfActor[1,i]/priceOfStockAtDatei))
         }
         if (i > 240){
            portfolioOfActor[,i+1] <- sellStock(i,j, portfolioOfActor[1,i],
                portfolioOfActor[2,i], portfolioOfActor[2,i]+10)
         }
      }
      }
```

```
  if (portfolioOfActor[2, nOfDays]<=0){
    terminalWealth[j] <- portfolioOfActor[1, nOfDays]+portfolioOfActor[2, nOfDays]*
        matrixOfSimulations[j,nOfDays]
  } else {
    terminalWealth[j] <- portfolioOfActor[1, nOfDays]+portfolioOfActor[2, nOfDays]*
        matrixOfSimulations[j,nOfDays]*(1-transactionCosts)
  }
}
```

```
#Lasketaan nyt toimijan utiliteettifunktion U kuvaamat arvot simuloiduille toimijan
    portfolion lopetuspositioille eri simulaatioissa.
for (i in 1:nOfSimulations){
  utilityOfActor[i] <- log(terminalWealth[i])
}

print(utilityOfActor)
```

```
> print(utilityOfActor)
[1] 8.692399 9.477544 8.855507 8.314592 8.949964 9.248499 9.111088 8.574651 9.180931
    8.719795 9.517361 7.894940
> print(mean(utilityOfActor))
[1] 8.878106
> print(mean(terminalWealth))
[1] 7889.528
```

Nyt eräässä ajossa, jossa otoskoko oli 12 kappaletta saatiin toimijan keskimääräiseksi utiliteetiksi n. 8,88 ja lopetusvarallisuudeksi 7889,528 kappaletta velkakirjaa. Jos kasvatetaan simulaation kokoa taas 5000 kappaleeseen, niin keskimääräiseksi utiliteetiksi ja lopetusvarallisuudeksi saadaan 8,965 sekä 8541,118 kappaletta bondia.

Nyt viimeisenä voisi vertailla vielä, miten löydetty optimaalinen sijoitusstrategia vertautuu esimerkiksi ensimmäisen simulaation sijoitusstrategiaan, missä mentiin long-positioon mahdollisimman aikaisella ajanhetkellä ja positio likvidoitiin lopetusajanhetkellä. Lisäksi voisi testata miten pärjää sellainen sijoitusstrategia, missä toimija hakee positionsa vuodenaikaan nähden oikein, mutta ei kuitenkaan muuta positiotaan mahdollisten teknisten poikkeavuuksien sattuessa.

Ensimmäisen simulaation mukainen sijoitusstrategia:

```
#Jokaiselle simulaatiolle j in 1:nOfSimulations
for (j in 1:nOfSimulations){
  #Jokaisella kaupankäyntiajanhetkellä (jokaiselle simulaatiolle):
  for (i in 1:(nOfDays-1)){
    priceOfStockAtDatei <- matrixOfSimulations[j,i]
    #Jos toimijalla on millä tahansa ajanhetkellä varallisuutta ostaa lisää osaketta,
        niin hän tekee sen ja ostaa niin monta kappaletta kuin mahdollista
    portfolioOfActor[,i+1]<-t(buyStock(i,j,portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor[2,i],
        floor(portfolioOfActor[1,i]/priceOfStockAtDatei)))
```

```
  }
  #Nyt (jokaisen yksittäisen simulaation) lopetusajanhetkellä nOfDays likvidoidaan
     osakepositio ja tallenentaan se terminalWealth muuttujaan.
  terminalWealth[j] <- portfolioOfActor[1, nOfDays]+portfolioOfActor[2, nOfDays]*
     matrixOfSimulations[j,nOfDays]*(1-transactionCosts)
}

#Lasketaan nyt toimijan utiliteettifunktion U kuvaamat arvot simuloiduille toimijan
   portfolion lopetuspositioille eri simulaatioissa.
for (i in 1:nOfSimulations){
  utilityOfActor[i] <- log(terminalWealth[i])
}

print(mean(utilityOfActor))
print(mean(terminalWealth))

[1] 4.497319
[1] 107.919
```

Ja pelkästään vuodenajan huomioiva sijoitusstrategia:

```
for (j in 1:nOfSimulations){
  for (i in 1:(nOfDays-1)){
    priceOfStockAtDatei <- matrixOfSimulations[j,i]
    if (i <= 60){
      portfolioOfActor[,i+1] <- sellStock(i,j, portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor
         [2,i], portfolioOfActor[2,i]+10)
    }
    if ((i > 60) & (i<=150)){
      portfolioOfActor[,i+1] <- buyStock(i,j, portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor[2,
         i], floor(portfolioOfActor[1,i]/priceOfStockAtDatei))
    }
    if ((i > 150) & (i<=240)){
      portfolioOfActor[,i+1] <- buyStock(i,j, portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor[2,
         i], floor(portfolioOfActor[1,i]/priceOfStockAtDatei))
    }
    if (i > 240){
      portfolioOfActor[,i+1] <- sellStock(i,j, portfolioOfActor[1,i], portfolioOfActor
         [2,i], portfolioOfActor[2,i]+10)
    }
  }
  if (portfolioOfActor[2, nOfDays]<=0){
    terminalWealth[j] <- portfolioOfActor[1, nOfDays]+portfolioOfActor[2, nOfDays]*
       matrixOfSimulations[j,nOfDays]
  } else {
    terminalWealth[j] <- portfolioOfActor[1, nOfDays]+portfolioOfActor[2, nOfDays]*
       matrixOfSimulations[j,nOfDays]*(1-transactionCosts)
  }
}
```

```
for (i in 1:nOfSimulations){
  utilityOfActor[i] <- log(terminalWealth[i])
}

print(mean(utilityOfActor))
print(mean(terminalWealth))

[1] 8.097606
[1] 3581.303
```

Molemmissa vertailuna olevista strategioista otoskokona oli 5000 kappaletta ja kaikki 3 strategiaa on tehty samoille viidelle tuhannelle osakeprosessin S simulaatioille.

5.3 Simulaatioiden johtopäätökset

Johtopäätöksenä voidaan sanoa, että toimijan valitsemalla strategialla on suuri merkitys tämän lopulliseen utiliteettiin, sillä kun vertaillaan toisessa simulaatiossa tarkasteltuja strategioita, niin niiden välillä on merkittäviä eroja. Pelkkä long-positio osakkeissa oli selvästi surkein strategia, sillä siinä lopetusvarallisuudeksi toimijalle jäi keskimäärin 108 kappaletta bondia, mikä on vähemmän kuin varallisuus millä hän aloitti (110 bondia). Siten hän olisi saanut paremman utiliteetin (ainakin näissä simulaatioissa), jos hän ei olisi tehnyt yhtään mitään. Toiseksi parhaimmaksi strategiaksi osoittautui strategia, jossa toimija otti huomioon vuodenaikojen tuomat sijoitusmahdollisuudet. Tässä strategiassa toimija sai hyvää tuottoa alkupääomalleen ja siten myös utiliteetti oli melko korkea n. 8,1. Parhaimmaksi strategiaksi osoittautui selvästi se, missä otettiin sekä vuodenaika ja tekniset poikkeavuudet huomioon: toimijan lopetusvarallisuus oli yli kaksinkertainen vuodenaikastrategiaan verrattuna. Utiliteettikin oli n. 8,9.

Kiinnostavana huomiona voidaan painottaa uudelleen, että tämän työn asetelmassa, kun toimijan utiliteetti yritetään maksimoida lopetusajanhetkellä, niin ilmenee, että oikeastaan vain osakeprosessin S kululla on merkitystä toimijan optimaalisen portfolion määräytymiseen. Hänen tulee valita optimaalinen salkkunsa sen perusteella, miten prosessi S on jakautunut, eli osakeprosessin S jokaisen ajanhetken mukaisen trendin perusteella, huomioiden tietysti, että transaktiokulujen vallitessa on kannattavaa käydä kauppaa. Lisäksi mainittakoon, että näissä simulaatioissa utiliteettifunktion $U(x) = \ln(x)$ muodosta johtuen utiliteetin kasvu hidastuu paljon vaikka lopetusvarallisuus kasvaisikin jyrkästi, mikä ilmenee kun vertaillaan kahta parhainta strategiaa toisiinsa. Tilannehan saattaisi olla toisenlainen jollain toisella utiliteettifunktiolla. Esimerkiksi jos utiliteettifunktio lähenisi suoraa $y = x$, siten kuitenkin, että utiliteettifunktio säilyttäisi konkaaviutensa, niin tällöin lopetusvarallisuuden lineaarinen tai eksponentiaalinen kasvu kuvautuisi utiliteettiin siten, että utiliteettikin lähes noudattaisi lopetusvarallisuuden mukaista kasvua.

6 Johtopäätökset

Kappaleiden 3 ja 4 asetelmassa tarkasteltiin diskreettiaikaista markkinoita, jossa on yksi velkakirja ja yksi osake. Lisäksi kitka oli vain toispuoleista, eli transaktiokuluja maksettiin vain osakkeita myydessä. Todellisuudessa reaalimarkkinoilla sijoitusinstrumenttien määrä on suurempi ja toimijalla on mahdollisuus valita useista riskillisistä arvopaperista ja bondeista, joilla käydä kauppaa. Lisäksi yksityishenkilötoimijalla transaktiokulut ovat yleensä molemminpuoliset, eli hän maksaa välityspalkkioita sekä osakkeita ostaessaan että myydessään. Jos oltaisiin tarkasteltu markkinoita, jossa riskillisiä osakkeita olisi ollut monia, niin asetelmaan olisi pitänyt lisätä oletus, että osakkeet ovat toisistansa lineaarisesti riippumattomia. Tällekin asetelmalle voidaan esittää kritiikkiä sen realistisuudesta, sillä reaalimarkkinoilla esiintyy riippuvuuksia sekä bondien että osakkeiden välillä. Esimerkkinä voidaan antaa 2 yritystä, joista ensimmäinen valmistaa vaikkapa puhelimia ja toinen yritys valmistaa ja toimittaa ensimmäisen yrityksen puhelimiin prosessoreita. Tällöin on melko ilmeistä, että tilanteen seurauksena yritysten osakkeiden välillä esiintyy molemminpuolista riippuvuutta.

Utiliteetin maksimointiongelman oletuksista voisi ainakin kritisoida toimijan utiliteettifunktiota. Kappaleen asetelmassa toimija haluaa vain maksimoida lopetusaikahetken varallisuutensa bondeissa. Häntä ei siis kiinnosta mitä osakkeen kurssille ja hänen varallisuudelleen tapahtuu loppuhetkeä edeltävinä aikahetkinä. Reaalimaailmassa tämä tilanne on taas melko absurdi ja usein toimijan utiliteettiin ja tuotto-odotuksiin sidotaan osakkeisiin liittyvät riskit ja toimijan oma riskitoleranssi.

Vaikka työn asetelmassa ollaankin monilta osin kaukana reaalimarkkinoiden asetelmasta, niin siitä huolimatta voidaan tarkastella portfolion konstruointiteoriaa ja utiliteettiteoriaa kitkallisilla markkinoilla siten, että asiat ovat vielä mielekkäitä kun niitä peilataan reaalimaailman tilanteeseen. Lisäksi kun työn oletukset ovat tarkasti rajattuja ja yksinkertaisia, niin tällöin myös tulokset ja sovellukset ovat luettavuudeltaan ja ymmärrettävyydeltään yksinkertaisia. Jos työhön olisi lisätty elementtejä, joiden seurauksena mallinnettaisiin reaalimaailman tilannetta tarkemmin ja kattavammin, niin myös lauseet ja todistukset muuttuisivat monimutkaisemmiksi.

Viitteet

[1] Schachermayer, Walter. Asymptotic Theory of Transaction Costs. European Mathematical Society, 2017.

[2] Delbaen, Freddy, and Walter Schachermayer. The mathematics of arbitrage. Springer Science & Business Media, 2006.

[3] Kabanov, Yuri, and Mher Safarian. Markets with transaction costs: Mathematical Theory. Springer Science & Business Media, 2009.

[4] Border, K. C. ”Separating hyperplane theorems.”Notes, California Institute of Technology. www. hss. caltech. edu/ kcb/Notes/SeparatingHyperplane. pdf (2010).

[5] Gallier, Jean. ”Notes on convex sets, polytopes, polyhedra, combinatorial topology, Voronoi diagrams and Delaunay triangulations.”arXiv preprint arXiv:0805.0292 (2008).

[6] R Core Team (2020). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL https://www.R-project.org/.

[7] Kabanov, Yu M., and Ch Stricker. ”The Harrison–Pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs.”Journal of Mathematical Economics 35.2 (2001): 185-196.

[8] Deelstra, Griselda, Huyên Pham, and Nizar Touzi. ”Dual formulation of the utility maximization problem under transaction costs.”Annals of Applied Probability (2001): 1353-1383.